# Ismétlés

## Lorentz transzformáció

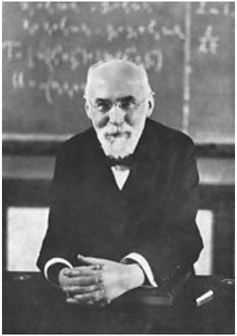
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

## Lorentz kontrakció

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

## Idő dilatáció

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$



# Sebességek összeadása

Mekkora sebességgel mozog egy részecske a $K'$ redszerben, amely a $\mathcal{K}$ rendszerben $v$ sebességgel mozog? $\mathcal{K}'$ rendszer mozogjon $V$ sbességgel $\mathcal{K}$-hoz képest.

$$\begin{pmatrix} t' \\ v't' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c^2} \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix}$$

$$t'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = t - \frac{Vv}{c^2}t, \qquad v't'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = -Vt + vt$$

$$v' = \frac{v-V}{1-\frac{Vv}{c^2}}$$

# Sebességek összeadása

Ha $\mathcal{K}$-ban fénysebességgel haladunk, akkor $\mathcal{K}'$-ban is fénysebességgel kel haladnunk:

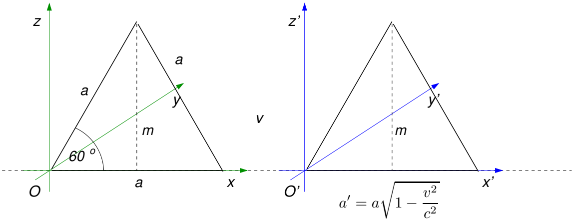
$$c = \frac{c - V}{1 - \frac{Vc}{c^2}} = \frac{c - V}{\frac{c-V}{c}} = c$$

Ha $\mathcal{K}'$ fénysebességgel távolodik $\mathcal{K}$-tól, $V = c$, akkor $v' = -c$:

$$c = \frac{v - c}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{v - c}{\frac{c-v}{c}} = -c$$

# Néhány egyszerű példa

A $\mathcal{K}$ rendszerben van egy szabályos háromszög. Mekkorának látjuk a szögeit a $\mathcal{K}'$ rendszerben?




$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

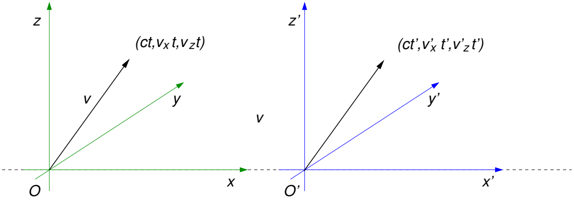
A háromszög magassága változatlan marad csak az alap hossza változik. Az alapon lévő szög tangense:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{2m}{a'} = \frac{2m}{a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\text{tg}(\frac{\pi}{3}+\Delta) = \text{tg}(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{4}\Delta = \sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right), \qquad \Delta = 2\sqrt{3}\frac{v^2}{c^2}$$

# Néhány egyszerű példa

A $\mathcal{K}$ rendszerben $45$-ban halad egy részecske $v$ sebességgel . Milyen irányban mozog a $\mathcal{K}'$ rendszerben?




$$v_x = v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ v'_x t' \\ v'_z t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{V}{c} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{V}{c} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ v_x t \\ v_z t \end{pmatrix}$$

A sebesség $z$ komponense nem egyezik meg a két rendszerben, mert az idő nem egyformán telik bennük.

# Néhány egyszerű példa

$$v'_x t' = -\frac{Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{v_x t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

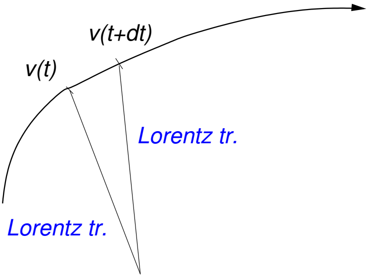
$$v'_z t' = v_z t$$

$$\mathrm{tg}(\alpha') = \frac{v'_z}{v'_x} = \frac{v_z}{v_x - V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

# Idő dilatáció és a müonok

A müonok a leptonok családjába tartoznak, így az elektronok rokonai. Legtöbbször a kozmikus részecskék és a légkör részecskéinek ütközéskor keletkeznek nagyjából 20 km-re a föld felszínétől. Az élettartamuk $\tau = 2.2 \times 10^{-6}\ s$, így ha még fénysebességgel is repülnek, legfeljebb 660 métert tehetnek meg, ennek ellenére a föld felszínén is tudjuk detektálni őket. Ennek oka, hogy a saját órájuk lassabban jár, mint a mi földfelszínhez kötött óránk. Természetesen azokat a fizikai folyamatokat, amelyek a részecske bomlását okozzák a részecskével együtt mozgó rendszerben kell leírnunk és számára az idő is a saját rendszeréhez kötött óra szerint múlik. A Lorentz transzformációnak megfelelően $\tau$ idő alatt, ameddig el nem bomlik a részecske, $z = v\tau/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ távolságot tesz meg. Tegyük fel, hogy a müonunk a fénysebesség 99%-val halad, ekkor elbomlásáig a mi rendszerünkben 3.4 km-t tesz meg a 0.66 km-rel szemben.

# Saját idő




A részecske $dt$ ideig egyenletes mozgást végez $v(t)$ sebességgel: $dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. $dt$ idő mulva a sebessége $v(t + dt)$... A részecskével együtt mozgó rendszerben az eltelt idő ezeknet a $dt'$ időknek az összege lesz:

$$\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt$$

A részecskével együtt mozgó rendszerben eltelt időt hívjuk a részecske sajátidejének.

Változik-e a sajátidő, ha egy másik inerciarendszerből írjuk le a részecske mozgását?

# Saját idő

Hogyan viselkedik a $(ct)^2 - x^2$ a Lorentz transzformációval szemben?

$$(ct')^2 - x'^2 = \begin{pmatrix} ct', & x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (ct, \quad x) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \end{pmatrix} =$$

$$(ct, \quad x) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (ct)^2 - x^2$$

Definiáljunk egy új skalár szorzatot:

$$(ct)^2 - x^2 = \begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{metrikus tenzor}} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Nem teljesíti az öszes, szokásos feltételt, pl.: $\mathrm{xx} \not> 0$, ahol $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$.

Nem euklidészi tér: Minkowsky tér.

# Saját idő

A részecske a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ rendszerekben $v$, illetve $v'$ sebességgel mozog $dt$, illetve $dt'$ ideig. A két rendszerben a sajátidő:

$$cd\tau = cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{(cdt)^2-(vdt)^2} = \sqrt{(cdt)^2-(dx)^2}$$

$$cd\tau' = cdt'\sqrt{1-\frac{{v'}^2}{c^2}} = \sqrt{(cdt')^2-(v'dt')^2} = \sqrt{(cdt')^2-(dx')^2}$$

Az előbb láttuk, hogy $(cdt)^2-(dx)^2 = (cdt')^2-(dx')^2$, tehát $d\tau = d\tau'$.

Természetesen a teljes integrálra is teljesül az egyenlőség, vagyis a $\tau$ sajátidő minden inerciarendszerben ugyanaz lesz!

# 3+1 dimenzió

Tegyük fel, hogy a tengelyek párhuzamosak és a $t=0$ pillanatban két rendszernek megegyezett az origója. A $\mathcal{K}'$ rendszer $v$ sebességgel halad a közös $x$ tengely mentén. A Lorentz transzformáció:

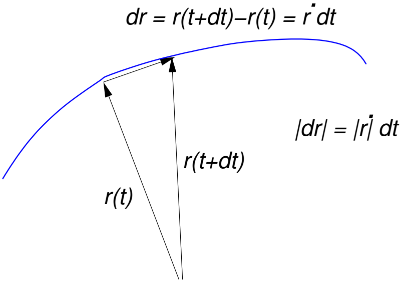
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{V}{c} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A metrikus tenzor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A $(ct)^2 - \mathbf{r}^2 = (ct')^2 - \mathbf{r}'^2$ ebben az esetben is teljesül. Ha $\mathcal{K}'$ nem párhuzamosan mozog az $x$ tengellyel, akkor előbb elforgatjuk $\mathcal{K}$-t a megfelelő irányba, elvégezzük a fenti transzformációt és ha szükséges mégegyszer forgatunk. A $(ct)^2 - \mathbf{r}^2$ mennyiséget mindegyik művelet változatlanul hagyja.

# 3+1 dimenzió




Az ívhossz :

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}} dt$$

Az ívhossz Minkowsky térben:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$$

$$c\tau = \int \sqrt{\dot{\mathrm{x}}\dot{\mathrm{x}}} dt$$

$$\int \sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2} dt = c \int \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt$$

$$c d\tau = c\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt$$

Invariáns ívelem