1. A Lagrange függvény szimmetria csoportja

A mozgás egyenleteket a Lagrange függvényből az Euler-Lagrange egyenletek segítségével származtathatjuk:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{1}$$

Ha egy transzformáció – elforgatás, eltolás – a Lagrange függvényt önmagába viszi át, akkor nyilvánvalóan a mozgásegyenletek sem fognak megváltozni a hatására, azt modjuk hogy a Lagrange függvény invariáns az adott művelettel szemben. Azok a szimmetria műveletek, amelyekkel szemben invariáns a Lagrange függvény, csoportot alkotnak. Ezt a csoportot nevezzük a Lagrange függvény szimmetria csoportjának. Léteznek diszkrét és folytonos szimmetria csoportok csoportok. Példaként tekintsük azoknak a szimmetria műveleteknek a csoportját, amelyek egy szabályos háromszöget őnmagára képeznek le. Ilyen művelet a háromszög középpontján áthaladó tengely körüli 120°-os és 240°-os forgatás, az előző forgástengelyt és a háromszög egy csúcsát tartalmazó tükörsík, valamint az egység művelet. Ezek a műveletek egy diszkrét csoportot alkotnak, amelyet C_{3v}-vel jelölünk. Folytonos csoprotot alkotnak pl. a három dimenziós Euklidészi tér forgatásai és a forgástengelyeket tartalmazó síkokra való tükrözései. Ezt a csoportot $O(3)$-mal szoktuk jelölni. Mindkét csoport pont csoport, mert létezik legalább egy pont, amlyet a csoprt minden szimmetria művelete önmagába visz. Szintén folytonos csoport a transzlációs csoport, amely egy tetszüleges $\mathbf{r}$ vektorral való eltolásokat tartalmazza. Ez a csoport kézenfekvően nem lesz pontcsoport.

A továbbiakban foglalkozzunk a folytonos szimmetriákkal. Szeretnénk kapcsolatot találni a folytonos szimmetriák és a megmaradó mennyiségek között. Azt szeretnénk megmutatni a továbbiakban, hogy ha egy folytonos szimmetria csoporttal szemben invariáns a Lagrange függvény, akkor a csoporthoz tartozik egy megmaradó mennyiség.

2. Mozgásállandók

2.1. Transzlációs szimmetria

Először vizsgáljuk meg a transzlációs szimmetriát. Tekintsünk egy pont rendszert, amelyre nem hat külső erő. Ebben az esetben a potenciális energia csak a tömegpontok relatív elhelyezkedésétől függhet. Ha a teljes rendszert eltoljuk egy tetszőleges $\mathbf{r}$ vektorral, vagyis minden egyes tömegpontot eltolunk, akkor a relatív koordináták változatlanok maradnak, tehát a potenciális energia sem változik. A kinetikus energia skalár mennyiség, amely szintén változatlan marad az eltolás esetén, tehát, a Lagrange függvény is változatlan marad. A Lagrange függvény a következő alakú:

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_N) \; . \tag{2}$$

Tekintsünk egy kicsiny, infinitezimális, $\mathbf{\Delta r}$ eltolást. A Lagrange függvény megváltozását a transzláció hatására a következőképpen adhatjuk meg:

$$\Delta L = L(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \Delta\mathbf{r} \; . \tag{3}$$

Használjuk fel az

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{4}$$

Euler-Lagrenge egyenleteket a Lagrange függvény megváltozását leíró 3 számú egyenletben:

$$\Delta L = \Delta\mathbf{r} \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \Delta\mathbf{r} \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = 0 \; . \tag{5}$$

Mivel a Lagrange függvény változatlan marad az eltolás során a megváltozásának el kell tünnie tetszőleges $\Delta\mathbf{r}$ esetén, amely feltétel csak akkor teljesül, ha

$$\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}_a}} = 0 \; , \tag{6}$$

vagyis a

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}_a}} = \sum_{a=1}^{N}\mathbf{p}_a \tag{7}$$

mennyiség állandó lesz a mozgás során, ahol $\mathbf{p}_a = m_a\mathbf{v}_a$, amint azt a 2. számú egyenletből egyszerűen származtathatjuk. Ezt a mennyiséget a rendszer összimpulzusának hívjuk. Tehát ha a rendszer Lagrange függvénye invariáns az eltolással szemben, akkor az össz impulzus mozgásállandó lesz.

2.2. Forgás szimmetria

A háromdimenziós forgatások és a tükrözések szintén csoportot alkotnak, amelyet $O(3)$ rövidítéssel jelölünk. Pontosabban az $O(3)$ csoport azoknak a műveleteknek az összességét jelenti, amelyek a 3 dimenziós Euklidészi térben megőrzik egy vektor hosszát és létezik egy pont, amelyet minden művelet önmagába visz át. De jelenheti a 3×3-as ortogonális mátrixok halmazát is.

Tekintsünk egy $\mathbf{n}$ egységvektor körüli $\Delta\varphi$ szöggel való infinitezimális forgatást:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{r} = \mathbf{r} + \Delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r} \; , \tag{8}$$

ahol bevezettük az $\Delta\boldsymbol{\varphi} = \Delta\varphi\mathbf{n}$ vektort. Természetesen a sebesség vektor is hasonlóan transzformálódik:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{v} \; . \tag{9}$$

Az eltoláshoz hasonlóan írjuk fel a 2. számú Lagrange függvény megváltozását a forgátások hatására:

$$\Delta L = \sum_{a=1}^{N}\left((\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_a)\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} + (\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\mathbf{r}}_a)\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}\right) \; . \tag{10}$$

Használjuk ki az 1. számú Euler-Lagrange egyenletet:

$$\Delta L = \sum_{a=1}^{N}\left((\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_a)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}_a}} + (\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\mathbf{r}}_a)\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}_a}}\right) = \sum_{a=1}^{N}(\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_a)\dot{\mathbf{p}}_a + (\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\mathbf{r}}_a)\mathbf{p}_a) \; , \tag{11}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}_a}} = \mathbf{p}_a$. Kihasználva a hármas szorzat permutációs tulajdonságait a Lagrange függvény megváltozását a következő alakba írhatjuk:

$$\Delta L = \sum_{a=1}^{N}((\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_a)\dot{\mathbf{p}}_a + (\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\mathbf{r}}_a)\mathbf{p}_a) = \Delta\boldsymbol{\varphi}\sum_{a=1}^{N}(\mathbf{r}_a\times\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_a) = \Delta\boldsymbol{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}\mathbf{r}_a\times\mathbf{p}_a = 0 \; . \tag{12}$$

A fenti kifejezésnek tetszőleges kicsiny $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ szög esetén el kell tünnie, amley feltétel csak akkor teljesülhet, ha

$$\sum_{a=1}^{N}\mathbf{r}_a\times\mathbf{p}_a = \mathbf{L} = \text{állandó} \; . \tag{13}$$

A fenti $\mathbf{L}$ mennyiséget a rendszer perdületének vagy impulzus momentumának nevezzük. Tehát ha egy rendszer Lagrange függvénye invariáns a forgatásokkal szemben, akkor a teljes perdület mozgásállandó lesz.

2.3. Idő eltolás

Tételezzük fel, hogy a Lagrange függvény nem függ explicit módon az időtől, vagyis

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ . \tag{14}$$

Írjuk fel a Lagrange függvény teljes idő deriváltját:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a \right) \ . \tag{15}$$

Használjuk ki ismét az Euler-Lagrange egyenleteket és írjuk át a fenti kifejezést:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \left(\dot{q}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} + \ddot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^{N} \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ , \tag{16}$$

vagyis ha a Lagrange függvény explicit módon nem függ az időtől, akkor a következő mennyiség állandó lesz a mozgás során:

$$\sum_{a=1}^{N} \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L = E = \text{állandó} \ . \tag{17}$$

Helyettesítsük be az 2. számú Lagrange függvényt az előző kifejezésbe és az energia szokásos kifejezését kapjuk

$$E = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N) \ , \tag{18}$$

ahol az első tag az egyes tömegpontok kinetikus energiája, a második tag pedig az rendszer potenciális energiája, amely a tömegpontok helyzetétől függ.

A három legalapvetőbb szimmetria, a tér és időbeli eltolás, valamint az elforgatás azok a műveletek, amelyekkel szembeni invariancia következménye az impulzus, energia és a perdület megmaradása.