1. Megoldások

1. Feladat

a.)

A $\mathcal{K}'$ rendszer egyenletes v sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. Ekkor $\mathcal{K}'$-ban egy tömegpont koordinátáit a következő transzformációval kaphatjuk meg a $\mathcal{K}$ koordinátáiból:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

(a) Egy a sztratoszférában keletkező részecske a fénysebesség 90%-val mozog egyenletes sebességgel és $t = 360\ \mu s$ alatt éri el a föld felszinét. Mennyi ideig repült a saját rendszerében mérve?

(b) Mutasuk meg, hogy a $(cdt)^2 - dx^2$ ívelem invariáns a Lorentz transzformációval szemben!

Megoldás:

a.) A részecske a saját $\mathcal{K}'$ rendszerében végig az origóban tartózkodik. A $\mathcal{K}$ rendszerben a részecske v sebességgel mozog:

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix}$$

Kifejtve a fenti egyenlet első sorát a következő egyenletet kapjuk:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(t - t\frac{v^2}{c^2}\right) = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$

A földi $\mathcal{K}$ rendszerben $t = 360\ \mu s$, a részecskével együtt mozgó $\mathcal{K}'$ rendszerben $t' = 360\ \mu s\sqrt{1-0.9^2} = 156.9\ \mu s$

b.)

Érdemes a Lorentz transzformációt kicsit átírni:

$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a normát:

$$(cdt)^2 - dx^2 = \begin{pmatrix} cdt & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a normát $\mathcal{K}'$ rendszerben is:

$$(cdt')^2 - dx'^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} cdt & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix}$$

Végezzük el a mátrix szorzásokat:

$$(cdt')^2 - dx'^2 = \begin{pmatrix} cdt & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix} = (cdt)^2 - dx^2\ .$$

2. Feladat
Egy szabad részecske energiáját relativisztikusan a

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

kifejezéssel adhatjuk meg. Mutassuk meg, hogy ha levonjuk a részecske m_0c^2 nyugalmi energiáját, akkor kis sebességek esetén visszakapjuk az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiát!

Megoldás:
Használjuk az $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sorfejtését 1 körül!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

Alkalmazzuk az energia kifejezésre:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \,.$$

Nyilvánvalóan, ha levonjuk az m_0c^2 nyugalmi energiát, akkor visszakapjuk a kinetikus energia klasszikus alakját.

3. Feladat
A $\mathcal{K}'$ rendszer egyenletes v sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. Ekkor $\mathcal{K}'$-ban egy tömegpont koordinátáit a következő transzformációval kaphatjuk meg a $\mathcal{K}$ koordinátáiból:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \,, \qquad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

a.) Ha egy test a $\mathcal{K}'$ rendszerben V sebességgel mozog, mekkora sebességnek látszik ez a $\mathcal{K}$ rendszerben?

b.) A négyes sebességet a négyes hely sajátidő szerinti deriváltjából kapjuk:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{K}'$ rendszerben az előző, Lorentz transzformációval kaphatjuk meg a négyes sebességet. (Az egyszerűség kedvéért csak *kettes* sebességet használjunk.)

Megoldás:

a.)

Kezdetben $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ origója egy pontban volt. A $\mathcal{K}$ rendszerben t idő alatt $x = vt$ távolságra jut el, $\mathcal{K}'$ rendszerben pedig t' idő alatt $x' = v't'$ távolságra:

$$\begin{pmatrix} t' \\ v't' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c^2} \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix} \,.$$

Írjuk fel a két egyenletet miután átszoroztunk a $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ faktorral:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,t' &= t - \frac{Vv}{c^2}t \\ \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,v't' &= vt - Vt \end{aligned}$$

A két sort elosztva egymással:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a fénysebesség a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ rendszerben is c marad, ha az eredményben v helyére a fénysebességet helyettesítjük.

b.)

A négyes (kettes) sebesség a két rendszerben:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{v}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v' \end{pmatrix}.$$

A két sebességet a Lorentz transzformáció köti össze:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}$$

Az **a** ponthoz hasonlóan bontsuk fel soronként a fenti egyenletet és osszuk el egymással a két sort:

$$\frac{v'}{c} = \frac{v - V}{c - \frac{Vv}{c^2}} \qquad \text{vagyis} \qquad v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

4. Feladat

Egy részecske állandó sebességgel, körpályán kering a $\mathcal{K}$ inercia rendszerben. Milyen sebességgel kell keringenie, hogy a saját rendszerében mért keringési ideje fele akkora legyen, mint a $\mathcal{K}$ rendszerben mért periódus idő?

Megoldás:

A keringés során a részecske sebességének a nagysága állandó v. A saját ideje

$$T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{T}{2}$$

Ebből az egyenletből a keringési sebességrre $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ adódik.

5. Feladat

Tudjuk, hogy a speciális relativitás elmélete szerint az idő másképpen telik egy mozgó rendszerben, mint egy álló rendszerben. Egy ágyúgolyót $v_0 = 3\ km/s$ sebességgel függőlegesen felfelé lövünk ki, benne egy csirkével, amely $g = 10\ m/s^2$ egyenletes lassulással mozog ($v = v_0 - gt$). Mennyivel lesz idősebb az ikertestvére, amikor visszaesik a földre. ($\sqrt{1 - x} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$ ha $x << 1$.)

Megoldás:

A sajátidőt a következő integrállal határozhatjuk meg:

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v(t')^2}{c^2}} dt' .$$

A csirke sebessége $v(t) = v_0 - gt$. A csirke $T = v_0/g$ idő alatt éri el pályájának a legmagasabb pontját és ugyanennyo ideig esik lefelé a földi koordináta rendszerben. Helyettesítsük be a sebességet a sajátidő integráljába:

$$\tau = 2\int_0^T \sqrt{1 - \frac{(v_0 - gt)^2}{c^2}} dt$$

Használjuk a $\sin(x) = \frac{v_0 - gt}{c}$ helyettesítést:

$$\tau = \frac{2c}{g}\int_0^{v_0/c} \cos^2(x) dx = \frac{2c}{g}\int_0^{v_0/c} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{2c}{g}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\Big|_0^{v_0/c} = \frac{v_0}{g} + \frac{c}{2g}\sin(\frac{2v_0}{c})$$

Fejtsük sorba a sin függvényt harmad rendig:

$$\tau = \frac{v_0}{g} + \frac{c}{2g}\sin(\frac{2v_0}{c}) = \frac{v_0}{g} + \frac{c}{2g}\left(\frac{2v_0}{c} - \frac{1}{3!}\left(\frac{2v_0}{c}\right)^3\right) = 2\frac{v_0}{g} - \frac{v_0}{g}\frac{2}{3}\frac{v_0^2}{c^2} ,$$

vagyis az ágyúgolyóban lévő csirke $t = \frac{v_0}{g}\frac{2}{3}\frac{v_0^2}{c^2} = 3\times 10^{-8} s$ idővel lesz fiatalabb. Hasonló eredményre jutunk, ha az $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ sorfejtést alkalmazzuk.

6. Feladat

Tudjuk, hogy a speciális relativitás elmélete szerint az idő másképpen telik egy mozgó rendszerben, mint egy álló rendszerben. Egy müon keletkezik a sztratoszféra felső részén majd a Föld mágneses tere miatt a következő helikális pályán mozog:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\omega t) \\ y &= r\sin(\omega t) \\ z &= vt , \end{aligned}$$

ahol $r = 141\ m$, $\omega = 0.4 \times 10^6\ 1/s$ és $v = 0.6 \times 10^8\ m/s$. Milyen messze jut el „z” irányban, ha az átlagos élettartam $\tau = 2.2 \times 10^{-6}\ s$?

Megoldás:

Először határzzuk meg a sebesség négyzetét:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\omega t), & \dot{x} &= -r\omega\sin(\omega t) \\ y &= r\sin(\omega t), & \dot{y} &= r\omega\cos(\omega t) \\ z &= vt, & \dot{z} &= v , \end{aligned}$$

tehát $v^2 = r^2\omega^2 + v^2$. A saját rendszerében τ időnek kell eltelnie, amíg elbomlik:

$$\tau = t\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2 + v^2}{c^2}} .$$

A laboratóriumi rendszerben t ideig halad a z tengely irányába:

$$z = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2+v^2}{c^2}}} .$$

A megadott értékekkel $r^2\omega^2 + v^2 \approx 10^8\, m/s$ és $z \approx 141\, m$ adódik.

7. Feladat

A Lorentz transzformáció szerint amikor áttérünk egy $\mathcal{K}$ inercia rendszerből egy hozzá képest v sebességgel mozgó $\mathcal{K}'$ inercia rendszerre, a négyes (kettes) vektorok a következőképpen transzformálódnak:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{A } \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} \text{ négyes sebesség is ugyanígy transzformálódik.}$$

Mutassuk meg a fenti transzformációs szabályt alkalmazva, hogy ha egy tömegpont a $\mathcal{K}$ rendszerben v sebességgel mozog, akkor $\mathcal{K}$-hoz képest V sebességgel mozgó $\mathcal{K}'$ inercia rendszerben a tömegpont

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

sebességgel mozog!

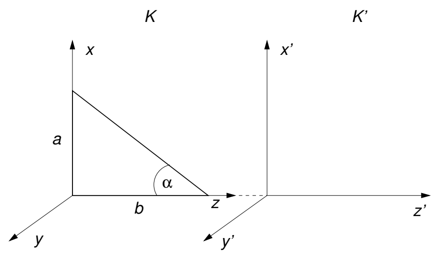
Megoldás:

Lásd a 3. feladat **b** részét!

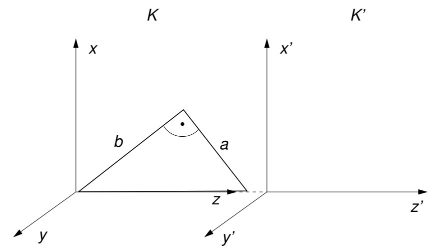
8. Feladat

A K′ rendszer v sebességgel mozog a K rendszerhez képest a közös z tengelyük mentén.

a.)



b.)



a.) Mekkora lesz az **a.)** ábrán látható derékszögű háromszög átfogója és egyik befogója által bezárt szög, ha a K′ rendszerben márjük?

b.) Teljesül-e a Pitagorasz tétel a **b.)** esetben a K′ rendszerben? Mekkora lesz $a'^2 + b'^2$, ha a háromszöghöz képest nyugvó K rendszerben $a^2 + b^2 = c^2$?

Megoldás:

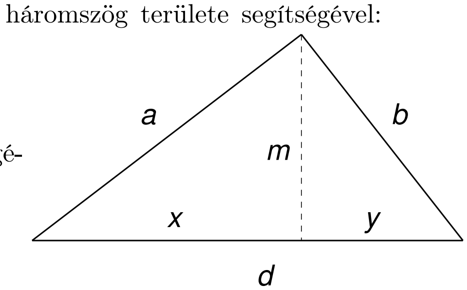
a.) A $\mathcal{K}'$ rendszerben csak a mozgással párhuzamos olal hossza változk, a rá merőleges oldal hossza változatlan marad:

$$a' = a, \qquad b' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}b\ .$$

A kérdéses szög tangense:

$$\mathrm{tg}(\alpha') = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}b} = \mathrm{tg}(\alpha)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

b.) Az **a** feladathoz hasonlóan a háromszög magassága a $\mathcal{K}'$ rendszerben változatlan, míg az alapja kontrahálódik. Először határozzuk meg a magasságot a háromszög területe segítségével:



$$T = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}dm, \qquad m = \frac{ab}{d}\ ,$$

majd fejezzük ki x és y nagyságát a Pitagórasz tétel segítségével:

$$x = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}}, \qquad y = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{d^2}}$$

A $\mathcal{K}'$ rendszerben

$$x' = \gamma x = \gamma a\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}}, \qquad y' = \gamma y = \gamma b\sqrt{1 - \frac{a^2}{d^2}}\ ,$$

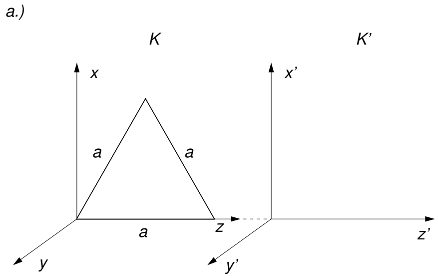
ahol $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ a szokásos kontrakciós faktor. Használjuk ismét a Pitagórasz tételt a' és b' meghatározásához:

$$a' = a\sqrt{(1 - \left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right)}, \qquad b' = b\sqrt{(1 - \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)}\ .$$

Könnyen beláthatjuk, hogy a $\mathcal{K}^prime$ rendszerben a Pitagórasz tétel nem teljesül és a két atfogó által bezárt szög nem derékszög.

9. Feladat

A K′ rendszer v sebességgel mozog a K rendszerhez képest a közös z tengelyük mentén. A K inercia rendszerben egy szabályos háromszög fekszik a z-tengelyen, amint azt az ábra is mutatja.



a.) Mekkora lesz a háromszög területe, ha a K′ rendszerben márjük?

b.) Mekkorának látjuk a háromszög szögeit a K′ rendszerből?

Megoldás:

a.) A K′ rendszer a háromszög alapjávalpárhuzamosan mozog v sebességgel. A mozgás irányára merőleges távolságok változatlanok maradnak, míg a mozgással párhuzamos oldal Lorentz kontrahálódik:

$$a' = a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$

Mivel a mgasság változatlan mindkét rebndszerben a terület változást csak a háromszög alapjának a változása okozza:

$$T' = T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

b.) Hasonló megfontolások miatt a háromszög alapja mellett lévő szögek tangansét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\tan(\beta') = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ha feltételezzük, hogy $v/c \ll 1$, akkor megbecsülhetjük a szög változását némi sorfejtés segítségével:

$$\tan(\beta') = \tan(\frac{\pi}{3}+\delta) = \tan(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{3})}\delta = \sqrt{3}+4\delta$$

Másrészt

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v^2}{c^2}\ ,$$

vagyis

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{v^2}{c^2}\ .$$

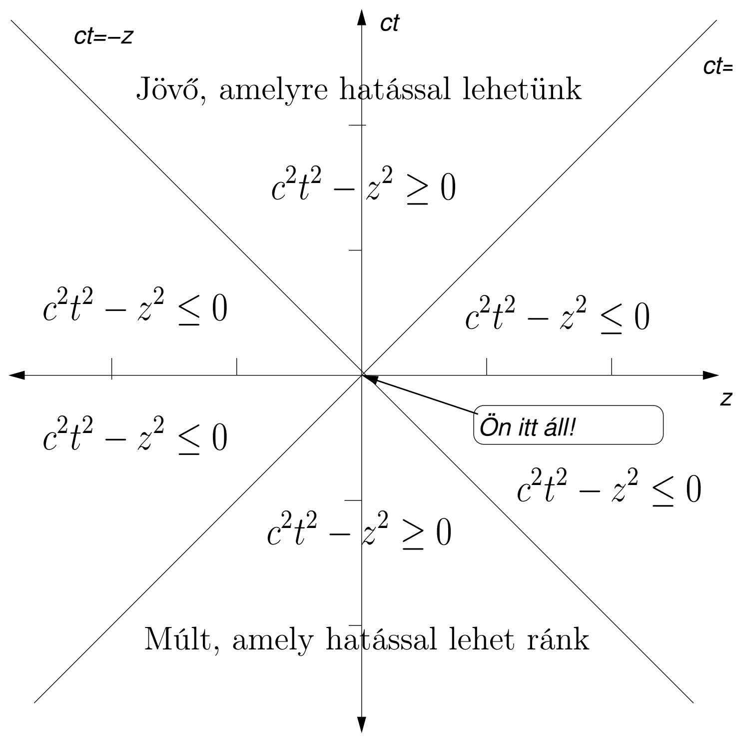
10. Feladat

Az alábbi ábrán az eltelt időt ábrázoljuk a hely függvényében. Éppen az origóban vagyunk.

a.) Jelöljük ki a azt a tartományt a múltban, ahol történő események hatással lehetnek ránk!

b.) Jelöljük ki a azt a tartományt a jövőben, amelyre hatással lehetünk!

c.) Milyen előjelű lesz ezeken a tartományokon a $c^2t^2 - z^2$ norma?



11. Feladat

Vezessük be a $\mathrm{th}(\chi) = \frac{v}{c}$ rapiditást. Mutassuk meg, hogy a rapiditás segítségével a Lorentz transzformáció a következő alakot ölti:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi) & -\mathrm{sh}(\chi) \\ -\mathrm{sh}(\chi) & \mathrm{ch}(\chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy ha áttérünk a $\mathcal{K}$ inerciarendszerről a $\mathcal{K}'$ rendszerre majd innen a $\mathcal{K}''$ rendszerre, akkor a fenti transzformációban a rapiditások összeadódnak.

Megoldás:

A Lorentz transzformációt a következő alakban írhatjuk fel:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\chi)}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{th}(\chi) \\ -\mathrm{th}(\chi) & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{ch}(\chi) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mathrm{sh}(\chi)}{\mathrm{ch}(\chi)} \\ -\frac{\mathrm{sh}(\chi)}{\mathrm{ch}(\chi)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi) & -\mathrm{sh}(\chi) \\ -\mathrm{sh}(\chi) & \mathrm{ch}(\chi) \end{pmatrix}$$

Kétszer elvégezve a transzformációt a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi_2) & -\mathrm{sh}(\chi_2) \\ -\mathrm{sh}(\chi_2) & \mathrm{ch}(\chi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi_1) & -\mathrm{sh}(\chi_1) \\ -\mathrm{sh}(\chi_1) & \mathrm{ch}(\chi_1) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi_2)\mathrm{ch}(\chi_1) + \mathrm{sh}(\chi_2)\mathrm{sh}(\chi_1) & -\mathrm{ch}(\chi_2)\mathrm{sh}(\chi_1) - \mathrm{sh}(\chi_2)\mathrm{ch}(\chi_1) \\ -\mathrm{ch}(\chi_2)\mathrm{sh}(\chi_1) - \mathrm{sh}(\chi_2)\mathrm{ch}(\chi_1) & \mathrm{ch}(\chi_2)\mathrm{ch}(\chi_1) + \mathrm{sh}(\chi_2)\mathrm{sh}(\chi_1) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi_2 + \chi_1) & -\mathrm{sh}(\chi_2 + \chi_1) \\ -\mathrm{sh}(\chi_2 + \chi_1) & \mathrm{ch}(\chi_2 + \chi_1) \end{pmatrix}$$

12. Feladat

Vezessük be az u.n. dinamikus tömeget:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Mutassuk meg, hogy

a.) $m^2c^2 - p^2 = m_0^2c^2$, **b.)** $m_0^2c^2 + p^2 = E^2/c^2$

ahol $p = mv$, v a hármas sebesség. Használjuk ki, hogy a négyes sebesség hossza (vigyázzunk a metrikára) invariáns a Lorentz transzformációval szemben.

Megoldás:

a.) A Minkowski térben a négyes vektorok önmagukkal vett skalár szorzata invariáns a Lorentz transzformációval szemben. Térjünk át egy olyan inercia rendszerbe, amelyben a részecske nyugalomban van. Ebben a rendszerben a norma négyzet $m_0^2c^2$ lesz. Az erediti rendszerben a norma négyzet: $m^2c^2 - p^2$. Az invariancia miatt a két norma négyzetnek meg kell egyeznie:

$$m^2c^2 - p^2 = m_0^2c^2 .$$

b.) Egy relativisztikus szabad részecske mozgási energiája $E = mc^2$, ahol m a dinamikus tömeget jelöli. Az **a.)** pontbeli egyenlet átrnedezésével egyszerűen belátható az összeföggés.

13. Feladat

Egy relativisztikus részecske mozgási energiája a négyes impulzus időszerű koordinátájával kapcsolatos:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

amely $v/c \ll 1$ esetén

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

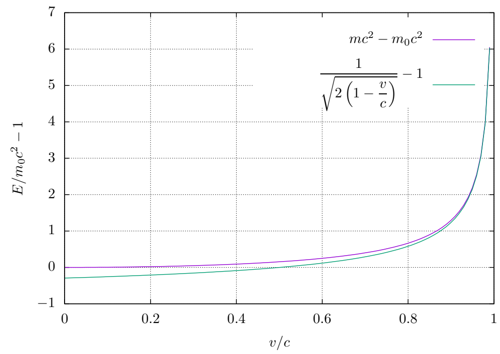
alakban közelíthető. Hogyan viselkedik az energia a fénysebességhez közel? Milyen függvénnyel közelíthetjük? ($\frac{v}{c} \approx 1$) Ábrázoljuk a mozgási energia és a nyugalmi energia különbségét v/c függvényében a szomszédos koordináta rendszerben!

Megoldás:

Nagy sebességek esetén $v/c \approx 1$. Az energiát írjuk át egy kicsit emészthetőbb formába:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}} \approx \frac{mc^2}{\sqrt{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}}$$

vagyis az energia $\dfrac{1}{\sqrt{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}}$ szerint száll el a fénysebesség környékén.



14. Feladat
A sztratoszféra felső részén, 30 km-re a föld felszínétől keletkezik egy müon a kozmikus sugárzás hatására. A részecskét a föld felszínén is tudjuk detektálni. Milyen távolinak látja a müon a föld felszínét, ha átlagosan $2.2 \times 10^{-6} s$ alatt bomlik le. Becsüljük meg a részecske sebességét!

Megoldás:
A részecske a saját rendszerében 2.2×10^{-6} másodpercig létezik, ez idő alatt hozzávetőleg fény sebességgel száguld a föld felé:

$$l' = 2.2 \times 10^{-6} s 3 \times 10^8 m/s = 660m$$

A saját rendszerében 660 métert tesz meg. Ha ennél tvolabb látja a földet, akkor elbomlik, mielőtt elérné. A laboratoriumi rendszerben $l = 3 \times 10^4 m$ távolságra van a föld felszínétől.

$$\frac{l'}{l} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{660}{3 \times 10^4} = 2.2 \times 10^{-2}$$
$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{l'^2}{l^2}}$$

Miután $(l'/l)^2$ 10^{-4} nagyságrendű, sorbafejthetjük a gyökfüggvényt:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{l'^2}{l^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{l'^2}{l^2} = 1 - 2.42 \times 10^{-4}$$

15. Feladat
A $\mathcal{K}'$ inercia rendszer V sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. A $\mathcal{K}$-ban v sebességgel mozgó tömegpont sebessége $\mathcal{K}'$-ben:

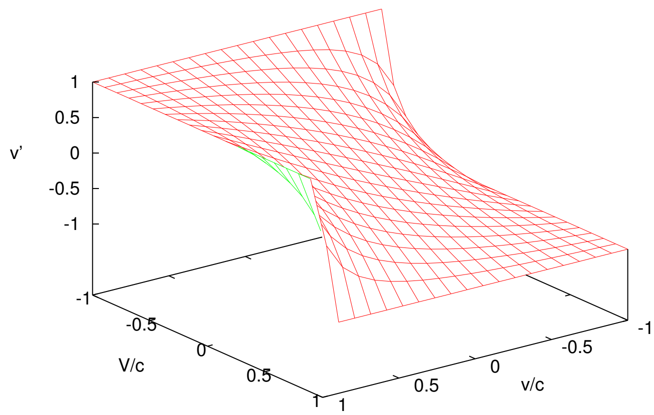
$$v' = \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}} .$$

Mutassuk meg, hogy ha v és V kisebb a fény sebességénél, akkor v' is kisebb lesz annál!

Megoldás:
Egyszerű átalakításokkal rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$\frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}} < c, \qquad v - V < c - \frac{vV}{c}$$
$$(v-V)c < c^2 - vV, \qquad v(c+V) < c(c+V), \qquad v < c$$

vagyis a feltétel teljesül! Ábrázolhatjuk v'/c arányt v/c és V/c függvényében:



Megfigyelhetjük, hogy a fügvény a [-1:1] intervallumon vesz fel értékeket.

16. Feladat

A $\mathcal{K}'$ rendszer egyenletes v sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. Ekkor $\mathcal{K}'$-ban egy tömegpont koordinátáit a következő transzformációval kaphatjuk meg a $\mathcal{K}$ koordinátáiból:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

a.) Mutassuk meg, hogy egy a $\mathcal{K}$ rendszerben álló l hosszúságú rúd a $\mathcal{K}'$ rendszerben rövidebbnek látszik!

b.) Vezessük le a négyes sebességet, amelyet a négyes hely sajátidő szerinti deriváltjaként kapunk:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Megoldás:

a.) A rúd hosszát a $\mathcal{K}'$ rendszerben mérjük meg, amikor annak egyik végpontja a közös origóban van, a másik végpontja pedig l' távolságban. A mérés pillanatában a $\mathcal{K}'$ rendszerben a rúd mindkét végpontja ugyanabban az időben van, eltérően a $\mathcal{K}$ rendszertől, ahol a mérés időpontjában a rúd két vége más időpontban van.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ l' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ l \end{pmatrix}$$

Írjuk fel az előző egyenletet soronként:

$$0 = ct - \frac{v}{c}l, \qquad l' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(-vt+l) \; .$$

Az első egyenletből fejezzük ki vt-t és helyettesítsük be a második egyenletbe. A következő kifejezés adódik:

$$l' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}l$$

b.) Az infinitezimálisan kicsiny saját időt a labor rendszerben eltelt idővel a következőképpen fejezhetjük ki:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Tudjuk, hogy a négyes hely négyes vektor, vagyis amikor áttérünk az egyik inercia rendszerből egy másik inercia rendszerbe, a Lorent transzformáció szerint transzformálódik. A sebesség a hely idő szerinti deriváltja. Ha meg akarjuk tartani a transzformációs szabályt, akkor csak olyan idő szerint deriválhatunk, amely minden inercia rendszerben megegyezik. Célszerűen válasszuk a saját időt:

$$\mathrm{r} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\mathrm{r}}{d\tau} = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \frac{dt}{d\tau} \ ,$$

ahol a lánc szabályt alkalmaztuk. A labor rendszerben eltelt idú sajátidő szerinti deriváltját egyszerűen kifejezhetjük:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ezt a összefüggést felhasználva a négys sebességre a következő kifejezést kapjuk:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

17. **Feladat**
Klasszikusan, ha egy mozgó m tömegpont egy álló ugyanolyan tömegpontnak ütközik rugalmasan, akkor az ütközés után a mozgó tömegpont megáll és a másik tömegpont mozog tovább ugyanazzal a sebességgel. Igaz-e ez az állítás relativisztikus leírás esetén is? Ebben az esetben a négyes impulzus marad meg az ütközés során. Indokolja a válaszát!

Megoldás:
Írjuk fel a négyes impulzus megmaradását:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{{v'_1}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v'_1 \end{pmatrix} + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{{v'_2}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Klasszikusan az ütközés után a mozgó részecske megáll és a kezdetben álló részecske v_1 sebességgel halad tovább: $v'_1 = 0$ és $v'_2 = v_1$. Ebben az esetben az előző egyenlet első sora nyilvánvalóan nem teljesül, vagyis sérülne az energia megmaradás:

$$\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \neq mc + \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \ .$$

---

18. Feladat
$\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ inercia rendszer tengelyei párhuzamosak egymással és kezdetben origójuk egy pontban volt. A $\mathcal{K}'$ rendszer V sebességgel mozog az x tengely irányában.

a.) Egy l hosszúságú rúd $\mathcal{K}$-ban α szöget zár be az x tengellyel. Mekkorának mérnénk ezt a szöget a $\mathcal{K}'$ rendszerben?

b.) A $\mathcal{K}$ rendszerben egy tömegpont v sebességgel mozog az x tengellyel 45°-ot bezáró egyenes mentén. Milyen irányban mozog a $\mathcal{K}'$ rendszerben? A sebesség melyik komponense egyezik meg a két inercia rendszerben?

Megoldás:
Írjuk fel a Lorentz transzformációt az időszerű és a x, y koordinátákra. Miután a $\mathcal{K}'$ rendszer az x-tengely mentén mozog, az y koordináták változatlanok lesznek ebben a rendszerben is:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{V}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{V}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} ,$$

ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} .$$

Az **a.** esetben a $\mathcal{K}'$ rendszerben a rúd eljének és végének a pozicióját egy időben mérjük, tehát $t' = 0$, míg a $\mathcal{K}$ rendszerben a rúd elje és vége nem lesz azonos időben: $t \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{V}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{V}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ l\cos(\alpha) \\ l\sin(\alpha) \end{pmatrix} .$$

A fenti egyenletrendszerből egyszerűen kifejezhető x' és y':

$$x' = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\, l\cos(\alpha), \qquad y' = l\sin(\alpha), \qquad \mathrm{tg}(\alpha') = \frac{y'}{x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\mathrm{tg}(\alpha)$$

A **b.** kérdés megváloszalásához induljon a test a közös origóból a $t = 0$ pillanatban és jusson el a $x = v_x t$, $y = v_y t$ pontba a $\mathcal{K}$, illetVe a $x' = v'_x t'$, $y' = v'_y t'$ pontba a $\mathcal{K}'$ rendszerben:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ v'_x t' \\ v'_y t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{V}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{V}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ v_x t \\ v_y t \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} v'_x t' &= -\gamma V t + \gamma v_x t \\ v'_y t' &= v_y t \end{aligned}$$

Az előző két egyenletből egyszerűen megkaphatjuk a sebesség irányát a $\mathcal{K}'$ rendszerben:

$$\mathrm{tg}(\alpha') = \frac{v'_y}{v'_x} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\frac{v_y}{v_x - V}$$

A két inercia rendszerben a sebességek egyik komponense sem fog megegyezni!

19. Feladat
Egy négyes (kettes) vektor, amikor áttérünk egy másik inercia rendszerbe, a következőképpen transzformálódik:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} ,$$

ahol v az új inerciarendszer sebessége. Mutassuk meg, hogy ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = x_0^2 - x_1^2$!

Megoldás:
Írjuk fel a négyes vektor normáját a metrikus tenzor segítségével:

$$x_0^2 - x_1^2 = (x_0, x_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Hasonlóan a $\mathcal{K}'$ rendszerben:

$${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = (x_0, x_1) \underbrace{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

20. Feladat

A müon egy instabil részecske, amely spontán módon elbomlik két neutrinóra és egy elektronra. A $t = 0$ pillanaban legyen N_0 müon jelen, t idő elteltével a müonok száma $N = N_0 e^{-t/\tau}$ számúra csökken, ahol a müon átlagos élettartama $\tau = 2.2\ \mu s$. Egy a fénysebesség 95%-ával mozgó müonnak mekkora lesz az átlagos élettertama a laboratóriumi rendszerben mérve? A müonok hány százaléka jut el $d = 3\ km$-re a keletkezés helyétől?

Megoldás:

A $2.2\mu s$-os átlagos élettertam természetesen a részecskével együtt mozgó rendszerben igaz:

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t$$

vagyis

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.2\nu s}{\sqrt{1 - 0.95^2}} = 7.045\mu s\ .$$

A laboratóriumi rendszerben mért átlagos élettartam, tehát, $t_0 = 7.045\mu s$ lesz. A müon $d = 3\ km$-t $t = d/c = 3 \times 10^3 m/(0.95 \cdot 3 \times 10^8 m/s) \approx 10\mu s$ idő alatt teszi meg a labor rendszerben. Ezalatt a részecskék száma $N = N_0 e^{-t/t_0}$-ra csökkent. $e^{-10\mu s/7.045\mu s} \approx 0.25$, vagyis a részecskék száma a negyedére csökkent.

21. Feladat

Egy M tömegű részecske két m_1 és m_2 tömegű részecskére bomlik. A bomlást abban az inercia rendszerben írjuk le, amelyikben a bomlás előtt a részecske nyugalomban volt. A négyes impulzus megmaradásának ($P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$) a segítségével mutassuk meg, hogy

$$Mc^2 = \sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 c^2 + p^2}, \qquad \text{ahol,} \qquad p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} m_1 v_1^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} m_2 v_2^2\ .$$

Használjuk fel, hogy a négyes implzus normája

$$\gamma^2 (m^2 c^2 - m^2 v^2) = m^2 c^2\ ,\ \text{ahol}\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Megoldás:

A bomlás előtt a nyugalomban lévő részecske négyes impulzusa:

$$P = \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A bomlás előtt és után a négyes impulzus komponenseinek meg kell egyeznie! Soronként kiírva:

$$\begin{aligned} Mc &= \gamma_1 m_1 c + \gamma_2 m_2 c \\ 0 &= \gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1 + \gamma_2 m_2 \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

A második sorból következik:

$$p^2 = (\gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1)^2 = (\gamma_2 m_2 \mathbf{v}_2)^2\ .$$

Használjuk fel a négyes vektor normáját:

$$\gamma_1^2 m_1^2 c^2 = m_1^2 c^2 + \gamma_1^2 m_1^2 v_1^2 = m_1^2 c^2 + p^2, \qquad \gamma_2^2 m_2^2 c^2 = m_2^2 c^2 + \gamma_2^2 m_2^2 v_2^2 = m_2^2 c^2 + p^2$$

Ezeket az összefüggéseket a négyesimpulzus időszerű komponensének megmaradását leíró egyenletbe helyettesítve az igazolandó összefüggést kapjuk:

$$Mc = \sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 c^2 + p^2}$$

Megjegyzés: Az előző egyenletből kiejezve p-t azt az eredményt kapjuk, hogy a kiindulási tömegnek mindenképpen nagyobbnak kell lennie mint a két bomlástermék tömegeinek az összege:
$M > m_1 + m_2$.