1. A $\mathcal{K}'$ rendszer egyenletes v sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. Ekkor $\mathcal{K}'$-ban egy tömegpont koordinátáit a következő transzformációval kaphatjuk meg a $\mathcal{K}$ koordinátáiból:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

   (a) Egy a sztratoszférában keletkező részecske a fénysebesség 90%-val mozog egyenletes sebességgel és $t = 360\ \mu s$ alatt éri el a föld felszinét. Mennyi ideig repült a saját rendszerében mérve?

   (b) Mutasuk meg, hogy a $(cdt)^2 - dx^2$ ívelem invariáns a Lorentz transzformációval szemben!

2. Feladat
Egy szabad részecske energiáját relativisztikusan a

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

kifejezéssel adhatjuk meg. Mutassuk meg, hogy ha levonjuk a részecske $m_0 c^2$ nyugalmi energiáját, akkor kis sebességek esetén visszakapjuk az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiát!

3. A $\mathcal{K}'$ rendszer egyenletes v sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. Ekkor $\mathcal{K}'$-ban egy tömegpont koordinátáit a következő transzformációval kaphatjuk meg a $\mathcal{K}$ koordinátáiból:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

   a.) Ha egy test a $\mathcal{K}'$ rendszerben V sebességgel mozog, mekkora sebességnek látszik ez a $\mathcal{K}$ rendszerben?

   b.) A négyes sebességet a négyes hely sajátidő szerinti deriváltjából kapjuk:

$$v^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}$$

   Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{K}'$ rendszerben az előző, Lorentz transzformációval kaphatjuk meg a négyes sebességet. (Az egyszerűség kedvéért csak *kettes* sebességet használjunk.)

4. Feladat
Egy részecske állandó sebességgel, körpályán kering a $\mathcal{K}$ inercia rendszerben. Milyen sebességgel kell keringenie, hogy a saját rendszerében mért keringési ideje fele akkora legyen, mint a $\mathcal{K}$ rendszerben mért periódus idő?

5. Feladat
Tudjuk, hogy a speciális relativitás elmélete szerint az idő másképpen telik egy mozgó rendszerben, mint egy álló rendszerben. Egy ágyúgolyót $v_0 = 3\ km/s$ sebességgel függőlegesen felfelé lövünk ki, benne egy csirkével, amely $g = 10\ m/s^2$ egyenletes lassulással mozog ($v = v_0 - gt$). Mennyivel lesz idősebb az ikertestvére, amikor visszaesik a földre. ($\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$ ha $x << 1$.)

6. Feladat
Tudjuk, hogy a speciális relativitás elmélete szerint az idő másképpen telik egy mozgó rendszerben, mint egy álló rendszerben. Egy müon keletkezik a sztratoszféra felső részén majd a Föld mágneses tere miatt a következő helikális pályán mozog:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\omega t) \\ y &= r\sin(\omega t) \\ z &= vt\ , \end{aligned}$$

ahol $r = 141\ m$, $\omega = 0.4 \times 10^6\ 1/s$ és $v = 0.6 \times 10^8\ m/s$. Milyen messze jut el „z” irányban, ha az átlagos élettartam $\tau = 2.2 \times 10^{-6}\ s$?

7. Feladat

A Lorentz transzformáció szerint amikor áttérünk egy $\mathcal{K}$ inercia rendszerből egy hozzá képest v sebességgel mozgó $\mathcal{K}'$ inercia rendszerre, a négyes (kettes) vektorok a következőképpen transzformálódnak:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

A $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}$ négyes sebesség is ugyanígy transzformálódik.

Mutassuk meg a fenti transzformációs szabályt alkalmazva, hogy ha egy tömegpont a $\mathcal{K}$ rendszerben v sebességgel mozog, akkor $\mathcal{K}$-hoz képest V sebességgel mozgó $\mathcal{K}'$ inercia rendszerben a tömegpont

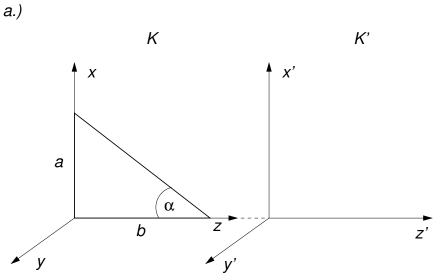
$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

sebességgel mozog!

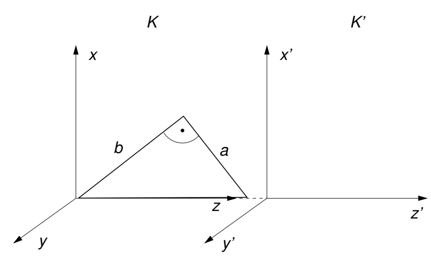
8. Feladat

A K$'$ rendszer v sebességgel mozog a K rendszerhez képest a közös z tengelyük mentén.

a.)



b.)



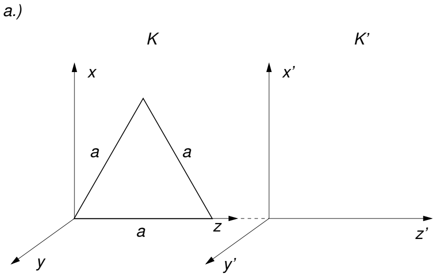
a.) Mekkora lesz az **a.)** ábrán látható derékszögű háromszög átfogója és egyik befogója által bezárt szög, ha a K$'$ rendszerben márjük?

b.) Teljesül-e a Pitagorasz tétel a **b.)** esetben a K$'$ rendszerben? Mekkora lesz ${a'}^2 + {b'}^2$, ha a háromszöghöz képest nyugvó K rendszerben $a^2 + b^2 = c^2$?

9. Feladat

A K$'$ rendszer v sebességgel mozog a K rendszerhez képest a közös z tengelyük mentén. A K inercia rendszerben egy szabályos háromszög fekszik a z-tengelyen, amint azt az ábra is mutatja.

a.)



a.) Mekkora lesz a háromszög területe, ha a K$'$ rendszerben márjük?

b.) Mekkorának látjuk a háromszög szögeit a K$'$ rendszerből?

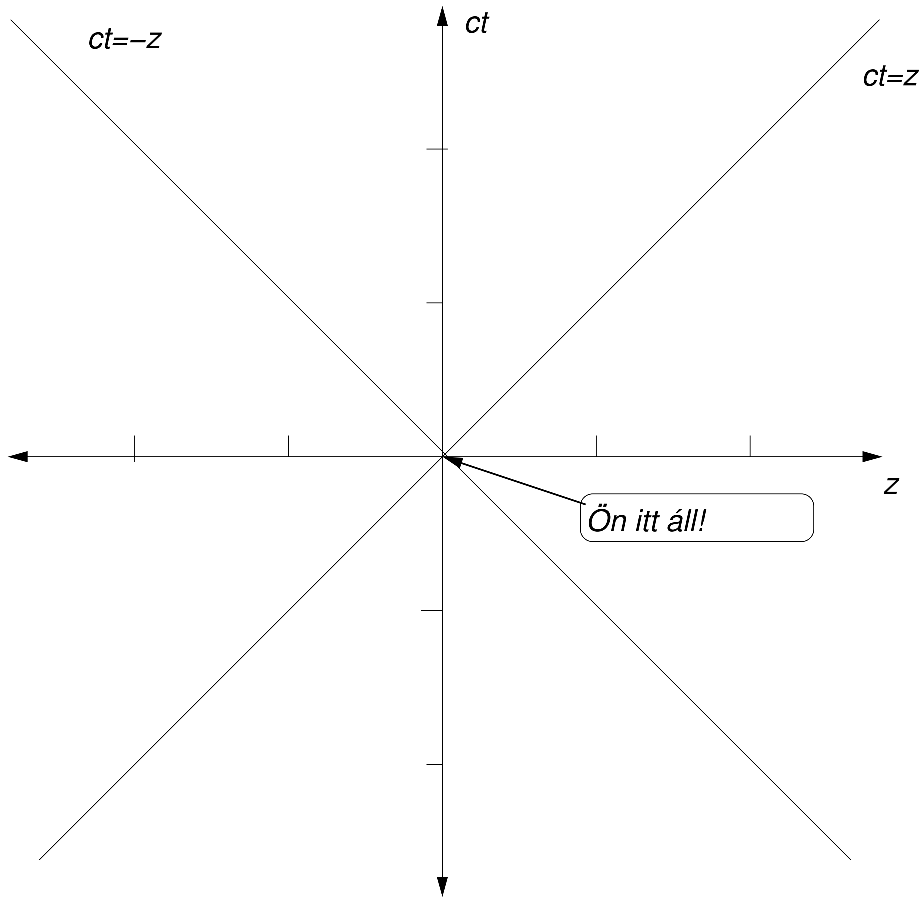
10. Feladat

Az alábbi ábrán az eltelt időt ábrázoljuk a hely függvényében. Éppen az origóban vagyunk.

a.) Jelöljük ki a azt a tartományt a múltban, ahol történő események hatással lehetnek ránk!

b.) Jelöljük ki a azt a tartományt a jövőben, amelyre hatással lehetünk!

c.) Milyen előjelű lesz ezeken a tartományokon a $c^2t^2 - z^2$ norma?



11. Feladat
    Vezessük be a $\mathrm{th}(\chi) = \frac{v}{c}$ rapiditást. Mutassuk meg, hogy a rapiditás segítségével a Lorentz transzformáció a következő alakot ölti:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi) & -\mathrm{sh}(\chi) \\ -\mathrm{sh}(\chi) & \mathrm{ch}(\chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} .$$

    Mutassuk meg, hogy ha áttérünk a $\mathcal{K}$ inerciarendszerről a $\mathcal{K}'$ rendszerre majd innen a $\mathcal{K}''$ rendszerre, akkor a fenti transzformációban a rapiditások összeadódnak.

12. Feladat
    Vezessük be az u.n. dinamikus tömeget:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

    Mutassuk meg, hogy

    a.) $m^2c^2 - p^2 = m_0^2c^2$

    b.) $m_0^2c^2 + p^2 = E^2/c^2$

    ahol $p = mv$, v a hármas sebesség. Használjuk ki, hogy a négyes sebesség hossza (vigyázzunk a metrikára) invariáns a Lorentz transzformációval szemben.

13. Feladat

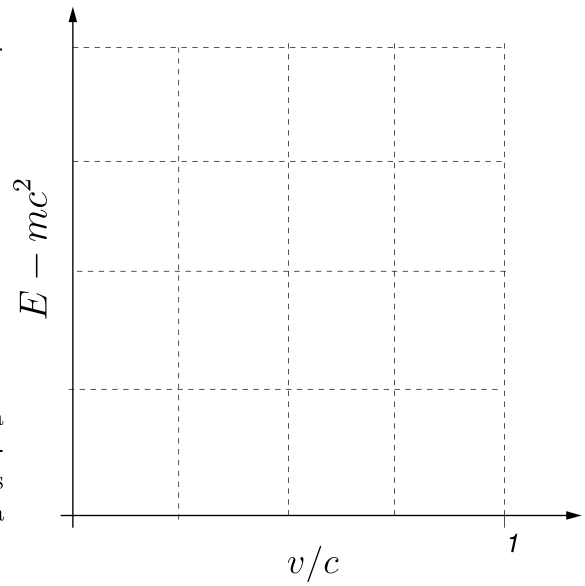
Egy relativisztikus részecske mozgási energiája a négyes impulzus időszerű koordinátájával kapcsolatos:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

amely $v/c \ll 1$ esetén

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

alakban közelíthető. Hogyan viselkedik az energia a fénysebességhez közel? Milyen függvénnyel közelíthetjük? ($\frac{v}{c} \approx 1$) Ábrázoljuk a mozgási energia és a nyugalmi energia különbségét v/c függvényében a szomszédos koordináta rendszerben!



14. Feladat
A sztratoszféra felső részén, 30 km-re a föld felszínétől keletkezik egy müon a kozmikus sugárzás hatására. A részecskét a föld felszínén is tudjuk detektálni. Milyen távolinak látja a müon a föld felszínét, ha átlagosan $2.2 \times 10^{-6} s$ alatt bomlik le. Becsüljük meg a részecske sebességét!

15. Feladat
A $\mathcal{K}'$ inercia rendszer V sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. A $\mathcal{K}$-ban v sebességgel mozgó tömegpont sebessége $\mathcal{K}'$-ben:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \ .$$

Mutassuk meg, hogy ha v és V kisebb a fény sebességénél, akkor v' is kisebb lesz annál!

16. Feladat
A $\mathcal{K}'$ rendszer egyenletes v sebességgel mozog a $\mathcal{K}$ inercia rendszerhez képest. Ekkor $\mathcal{K}'$-ban egy tömegpont koordinátáit a következő transzformációval kaphatjuk meg a $\mathcal{K}$ koordinátáiból:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \ , \qquad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

a.) Mutassuk meg, hogy egy a $\mathcal{K}$ rendszerben álló l hosszúságú rúd a $\mathcal{K}'$ rendszerben rövidebbnek látszik!

b.) Vezessük le a négyes sebességet, amelyet a négyes hely sajátidő szerinti deriváltjaként kapunk:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

17. **Feladat**
Klasszikusan, ha egy mozgó m tömegpont egy álló ugyanolyan tömegpontnak ütközik rugalmasan, akkor az ütközés után a mozgó tömegpont megáll és a másik tömegpont mozog tovább ugyanazzal a sebességgel. Igaz-e ez az állítás relativisztikus leírás esetén is? Ebben az esetben a négyes impulzus marad meg az ütközés során. Indokolja a válaszát!

18. Feladat
$\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ inercia rendszer tengelyei párhuzamosak egymással és kezdetben origójuk egy pontban volt. A $\mathcal{K}'$ rendszer V sebességgel mozog az x tengely irányában.

a.) Egy l hosszúságú rúd $\mathcal{K}$-ban α szöget zár be az x tengellyel. Mekkorának mérnénk ezt a szöget a $\mathcal{K}'$ rendszerben?

b.) A $\mathcal{K}$ rendszerben egy tömegpont v sebességgel mozog az x tengellyel 45°-ot bezáró egyenes mentén. Milyen irányban mozog a $\mathcal{K}'$ rendszerben? A sebesség melyik komponense egyezik meg a két inercia rendszerben?

19. Feladat
Egy négyes (kettes) vektor, amikor áttérünk egy másik inercia rendszerbe, a következőképpen transzformálódik:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} ,$$

ahol v az új inerciarendszer sebessége. Mutassuk meg, hogy ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = x_0^2 - x_1^2$!

20. Feladat
A müon egy instabil részecske, amely spontán módon elbomlik két neutrinóra és egy elektronra. A $t = 0$ pillanaban legyen N_0 müon jelen, t idő elteltével a müonok száma $N = N_0 e^{-t/\tau}$ számúra csökken, ahol a müon átlagos élettartama $\tau = 2.2\ \mu s$. Egy a fénysebesség 95%-ával mozgó müonnak mekkora lesz az átlagos élettertama a laboratóriumi rendszerben mérve? A müonok hány százaléka jut el $d = 3\ km$-re a keletkezés helyétől?

21. Feladat
Egy M tömegű részecske két m_1 és m_2 tömegű részecskére bomlik. A bomlást abban az inercia rendszerben írjuk le, amelyikben a bomlás előtt a részecske nyugalomban volt. A négyes impulzus megmaradásának ($P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$) a segítségével mutassuk meg, hogy

$$Mc^2 = \sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 c^2 + p^2}, \qquad \text{ahol,} \qquad p = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} m_1 v_1^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} m_2 v_2^2 \ .$$

Használjuk fel, hogy a négyes implzus normája

$$\gamma^2 (m^2 c^2 - m^2 v^2) = m^2 c^2 \ , \text{ ahol } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$