Gyakorló példák II.

1. Adjuk meg egy α dőlésszögű lejtőn surlódás nélkül csúszó test Lagrange függvényét és a mozgás egyenleteket!

2. Írjuk fel egy l hosszúságú fonál végén lengő m tömegű test Lagrange függvényét és adjuk meg a mozgásegyenleteit! Ne felejtsük el, hogy a test kétdimenziós mozgást végez!

3. Egy m_1 és egy m_2 tömegű testet egy k rugóerejű l_0 nyugalmi hosszúságú rugóval kötünk össze. (A rugó potenciális energiáját a $V(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ képlettel adhatjuk meg, ahol l a rugó hossza.) Milyen megmaradó mennyiségeink lesznek? Milyen mozgást fog a rendszer tömegközéppontja végezni? Inerciarendszer-e a tömegközépponttal együtt mozgó rendszer? Mekkora a rendszer impulzusa a tömegközépponti rendszerben? A megmaradási törvényeket kihasználva írjuk le a tömegpontok mozgását! Változni fog-e a mozgás síkja?

4. Egy test potenciális energiáját a következő képlettel adhatjuk meg:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{1}$$

Írjuk fel a részecske Lagrange függvényét! Milyen megmaradó mennyiségeink lesznek? Van-e minimális energiája a rendszernek az impulzus momentum függvényében? Adjuk meg a azt a tartományt, ahol a részecske tartózkodhat!

5. Vizsgáljuk meg, hogy bolygó mozgás esetén milyen esetekben lesz véges a mozgás és mikor távolodhat el a részecske végtelen távolra a vonzó centrumtól?

6. Mutassuk meg hogy az u.n. Runge–Lentz vektor idő szerinti deriváltja eltünik!

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha\frac{\vec{r}}{r}, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \tag{2}$$

ahol $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ az impulzus momentum, a potenciál pedig $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ alakú. Használjuk ki a $\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$ mozgásegyenletet, és hogy az $\vec{L}$ impulzusmomentum megmaradó mennyiség (vagyis az idő szerinti deriváltja eltünik).

7. A bolygó mozgás esetén határozzuk meg a részecske pályáját a megmaradó mennyiségek: energia, impulzus momentum, Runge–Lentz vektor, segítségével!