Négyes vektorok

Négyes hely és négyes sebesség

A speciális relativitás elméletében egy tömegpont koordinátáit a négydimenziós – 3 + 1 dimenziós – téridőben adjuk meg. A hely koordinátái

$$\mathtt{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Tudjuk, hogy a hely egy másik inerciarendszerre való áttéréskor a Lorentz transzformáció szabályai szerint változik:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} , \tag{1}$$

ahol az egyszerűség kedvéért csak egy térbeli változót használtunk. Az x, y korrdináták változatlanok maradnak, amennyiben a két rendszernek párhuzamosak a tengelyei és a K' rendszer a z tengellyel párhuzamosan halad a K rendszerhez képest. Azokat a vektorokat, amelyek az egyik inerciarendszerről a másik inerciarendszerre való áttéréskor a 1. számú Lorentz transzformáció szerint transzformálódnak, négyes vektoroknak nevezzük.

Tudjuk, hogy a hely idő szerinti deriváltja a sebesség. Az idő azonban különbözőképpen telik a különböző inerciarendszerekben, így ha a labor rendszerünk ideje szerint deriváljuk a labor rendszer térbeli koordinátáit, akkor az eredmény biztosan nem a Lorentz transzformációnak megfelelően áll elő a K' rendszerben. A

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt \tag{2}$$

saját idő, azonban minden inerciarendszerben megegyezik, ezért ha e szerint képezzük a négyes hely vektor deriváltját, akkor az eredmény is a négyes vektorként fog transzformálódni:

$$\mathtt{v} = \frac{d\mathtt{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\mathtt{x}}{dt} .$$

A sajátidő 2. számú definíciójából

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

A négyes sebesség komponensei tehát:

$$\begin{pmatrix} \mathtt{v}_0 \\ \mathtt{v}_1 \\ \mathtt{v}_2 \\ \mathtt{v}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} ,$$

ahol v_1, v_2, v_3 a szokásos hármas sebesség komponensei.

Négyes impulzus

A négyes sebességből a tömeggel való szorzással kaphatjuk a négyes impulzust. A tömeget a részecskéhez képest nyugvó rendszerben mérjük, ezért nyugalmi tömegnek is nevezik és külön jelölik egy 0-ás indexszel:

m_0. Gyakran bevezetik a dinamikus tömeget is

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

, mi ezt a jelőlest nem használjuk. A negyes impulzus tehát:

$$\mathtt{p} = \begin{pmatrix} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

A $\mathtt{p}_1$, $\mathtt{p}_2$, $\mathtt{p}_3$ térszerű komponensek ha a sebesség sokkal kisebb, mint a c fénysebesség, akkor az $m\mathbf{v}$ impulzusba mennek át, hiszen az $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ faktor egyhez tart. De mit kezdjünk az időszerű, nulladik komponenssel? Vizsgáljuk meg, hogy ez a komponens hogyan viselkedik a $v \ll c$ határesetben. Fejtsük sorba v/c szerint a c fénysebességgel beszorzott komponenst:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + \mathcal{O}(\frac{v^4}{c^4}) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{O}(\frac{v^4}{c^4})$$

A második tagban felismerhetjük a mozgási energia $\frac{1}{2}mv^2$ képletét, az első tagot nyugalmi energiának nevezzük, amely a részecske a tömegéhez kapcsolódik. Tehát a négyes impulzus nulladik komponense a tömegpont energiájával kapcsolatos: $\mathtt{p}_0 = E/c$.

A $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ függvény Taylor sora:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1 - \left.\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1 x + \mathcal{O}(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)$$

A négyes sebességből is képezhetünk egy invariáns skalárt, amely a Lorentz transformáció során nem változik

$$\mathtt{p}_0^2 - \mathtt{p}_1{}^2 - \mathtt{p}_2{}^2 - \mathtt{p}_3{}^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(m_0^2 c^2 - m^2 \mathbf{v}^2\right) = m_0^2 c^2$$