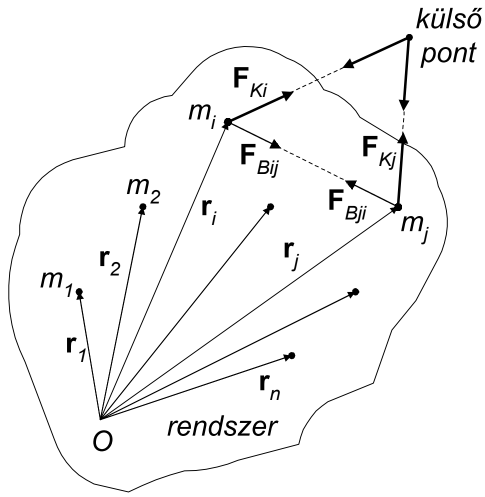
Tömegpont-rendszer mozgása

Bonyolultságban a tömegpont után következő, és gyakorlati szempontból is igen fontos eset, amikor több tömegpontból álló rendszert, ún. *tömegpont-rendszert* (rövidebben: *pontrendszert*) vizsgálunk. Az ábrán az általunk kiválasztott rendszerhez a körberajzolt területen lévő pontok tartoznak, ezeket a pontokat sorszámoztuk: az *i*-edik pont tömegét m_i-vel, helyzetvektorát $\mathbf{r}_i$-vel jelöljük.



A tömegpontokra ható erőket célszerű két csoportba osztani: a rendszerhez tartozó pontok között fellépő erőket *belső erőknek*, a rendszeren kívül eső testek által a rendszer pontjaira kifejtett erőket pedig *külső erőknek* nevezzük. Jelöljük a *j*-edik pont által az *i*-edik pontra kifejtett (belső) erőt $\mathbf{F}_{Bij}$-vel, az *i*-edik pontra ható külső erők eredőjét pedig $\mathbf{F}_{Ki}$-vel.

Tömegközéppont, a tömegközéppont mozgása

A pontrendszer mozgása leírható, ha külön-külön minden pontra felírjuk a mozgásegyenletet:

$$\mathbf{F}_{K1} + \sum_j \mathbf{F}_{B1j} = m_1 \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{F}_{K2} + \sum_j \mathbf{F}_{B2j} = m_2 \mathbf{a}_2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{F}_{Ki} + \sum_j \mathbf{F}_{Bij} = m_i \mathbf{a}_i$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{F}_{Kn} + \sum_j \mathbf{F}_{Bnj} = m_n \mathbf{a}_n \ .$$

Látható, hogy ez elég bonyolult leírási mód, ami a pontrendszerről, mint egészről nem sokat mond.

A teljes rendszer egyfajta jellemzését adja az az egyenlet, amit a fenti egyenletek összeadásával kapunk:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{Ki} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{Bij} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i \ .$$

Newton III. törvénye alapján könnyen belátható, hogy a belső erők összege nulla, így a rendszerre ható külső erők eredőjét $\mathbf{F}_K$-val jelölve, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\mathbf{F}_K = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i \ .$$

Jó lenne, ha a pontrendszerre a fentinél egyszerűbb, a tömegpont mozgásegyenletéhez hasonló összefüggést kaphatnánk, vagyis az egyenlet jobboldalát a pontrendszerre jellemző "egyetlen gyorsulás" és az $m = \sum_i m_i$ össztömeg szorzataként írhatnánk fel. Ilyen egyenletre juthatunk, ha a pontrendszer helyzetének globális jellemzésére bevezetjük az ún. tömegközéppontot, amit az alábbi módon definiálhatunk. Alakítsuk át a fenti mozgásegyenletet

$$\mathbf{F}_K=\sum_i m_i\mathbf{a}_i=\sum_i m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right)=m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right),$$

és vegyük észre, hogy a zárójelben lévő mennyiség helyzetvektor jellegű. Tekintsük ezt a tömegpontok helyzete által egyértelműen meghatározott sajátos helyvektort a pontrendszer *tömegközéppontjának* ($\mathbf{r}_{TK}$), amely eszerint

$$\mathbf{r}_{TK}=\frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{m}.$$

Kimutatható, hogy ez a pont valóban a pontrendszer tömegeloszlásának egyfajta centruma, ami homogén nehézségi erőtérben azonos a rendszer súlypontjával.
A fenti mozgásegyenletben a tömegközéppont helyzetvektorának második időderiváltja, vagyis a tömegközéppont gyorsulása ($\mathbf{a}_{TK}$) szerepel, így a rendszer mozgását leíró egyenlet az alábbi egyszerű alakot ölti

$$\mathbf{F}_K=m\,\mathbf{a}_{TK}.$$

Eszerint a *pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege a tömegközéppontban lenne elhelyezve, és erre a külső erők eredője hatna*.
Mivel a kiterjedt, merevnek tekinthető testek pontrendszerként is felfoghatók, ez az eredmény azt mutatja, hogy egy ilyen test haladó mozgása úgy írható le, mintha a test pontszerű lenne, és tömege a tömegközéppontjában lenne összesűrítve. Vagyis a fenti eljárást követve, *kiterjedt testek haladó mozgásának leírására a már megismert tömegpont-mozgásegyenlet használható*.

A lendület (mozgásmennyiség)-megmaradás tétele pontrendszerben

A lendületre vonatkozó összefüggéshez úgy juthatunk el, hogy a tömegközéppont mozgásegyenletét a lendületváltozás segítségével írjuk fel. Ehhez szükségünk lesz a tömegközéppont sebességének kifejezésére:

$$\mathbf{v}_{TK}=\frac{d\mathbf{r}_{TK}}{dt}=\frac{\sum_i m_i\mathbf{v}_i}{m}.$$

Ebből látható, hogy a pontrendszer lendületösszege ($\mathbf{p}_R$) kifejezhető a rendszer össztömegének és a tömegközéppont sebességének szorzatával:

$$\mathbf{p}_R=\sum_i m_i\mathbf{v}_i=m\mathbf{v}_{TK}$$

Eszerint a tömegközéppont ebből a szempontból is úgy viselkedik, mint egy olyan tömegpont amelynek tömege a pontrendszer össztömegével egyenlő.
A mozgásegyenlet ezzel így írható át:

$$\mathbf{F}_K=m\mathbf{a}_{TK}=m\frac{d\mathbf{v}_{TK}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_{TK})=\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\mathbf{v}_i\right),$$

vagyis a külső erők eredője egyenlő a rendszer összes lendületének változási sebességével:

$$\mathbf{F}_K=\frac{d\mathbf{p}_R}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\mathbf{v}_i\right).$$

Ebből következik, hogy ha a külső erők eredője nulla ($\mathbf{F}_K=0$), akkor:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\mathbf{v}_i\right)=0,$$

azaz

$$\mathbf{p}_R = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{állandó.}$$

Vagyis, ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a rendszer összes lendülete nem változik. Ez a *lendület-megmaradás törvénye pontrendszerre* (használatos még a mozgásmennyiség-megmaradás illetve impulzus-megmaradás elnevezés is,). A törvény jelentősége, többek között az, hogy mechanikai problémák megoldásánál olyan egyenletet ad, amelyből ismeretlen sebesség határozható meg, anélkül, hogy integrálnunk kellene a mozgásegyenletet. (Ennek a megmaradási törvénynek speciális esetét láttuk korábban két kölcsönható testre).

Pontrendszer energiája, a mechanikai energia megmaradásának tétele pontrendszerben

A pontrendszer energiájának vizsgálatánál az egyes pontokra felírt munkatételből indulhatunk ki. Ha a rendszer az *1* állapotából a *2* állapotba megy át, akkor a munkatétel az *i*-edik pontra:

$$W_{ei} = \Delta E_{mi} = E_{mi2} - E_{mi1} \ ,$$

ahol W_{ei} az *i*-edik pontra ható erők eredőjének munkája. Ha ezeket az egyenleteket összeadjuk, akkor a baloldalon a pontrendszerre ható összes erők munkáját, a jobboldalon pedig a pontrendszer teljes mozgási energiájának megváltozását kapjuk:

$$W_e = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} \ .$$

Ha különválasztjuk a külső- és belső erők munkáját (W_K és W_B), ezeken belül pedig a konzervatív- és nem konzervatív erők munkáját ($W_{K,k}$, $W_{K,nk}$, $W_{B,k}$, $W_{B,nk}$) , akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} + W_{K,k} + W_{B,k} = E_{m2} - E_{m1} \ .$$

Felhasználva, hogy a konzervatív erők munkája a helyzeti energia megváltozásának negatívja, átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = E_{m2} - E_{m1} + E_{hB2} - E_{hB1} + E_{hK2} - E_{hK1} ,$$

ahol a helyzeti energia-tagoknál a *B* és *K* index a belső kölcsönhatásokból, illetve a külső testekkel való kölcsönhatásból származó helyzeti energiára utal. Az összefüggést átrendezéssel áttekinthetőbb alakba írhatjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = \left(E_{m2} + E_{hB2} + E_{hK2}\right) - \left(E_{m1} + E_{hB1} + E_{hK1}\right),$$

ahol a zárójelben lévő tagok a rendszer összenergiáját jelölik a rendszer kezdeti (*1*) és végső (*2*) állapotában. Ha az összenergiát E_R-rel jelöljük

$$E_R = E_m + E_{hB} + E_{hK} \ ,$$

akkor az energiaváltozás általános összefüggését tömören így írhatjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = E_{R2} - E_{R1} = \Delta E_R \ ,$$

vagyis a rendszer energiájának megváltozása a nem konzervatív erők munkájával egyenlő. Az eredmény tehát ugyanaz, mint a tömegpont esetén, azzal a különbséggel, hogy itt az energia és munka kifejezései bonyolultabbak, mint a tömegpontnál.

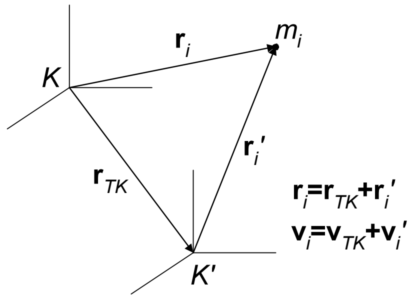
Ha a nem konzervatív erők munkája nulla (például úgy, hogy nincsenek ilyen erők), akkor

$$\Delta E_R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{R2} = E_{R1} \ ,$$

vagyis a rendszer összenergiája nem változik. Ez az *energia-megmaradás tétele pontrendszerre*. Jelentősége gyakorlati szempontból ugyanaz, mint az impulzus-megmaradás törvényéé: olyan egyenletet ad, amelyből pl. ismeretlen sebesség határozható meg, anélkül, hogy integrálnunk kellene a mozgásegyenletet.

****

A pontrendszer mozgási energiájának kifejezését tovább vizsgálva, egy újabb fontos mennyiséghez juthatunk el. Vizsgáljuk a pontrendszer mozgási energiáját egy *K* koordinátarendszerből és a hozzá képest egyenletesen mozgó *K'* rendszerből, amelyet a pontrendszer tömegközéppontjához rögzítettünk (ábra). Írjuk fel a pontrendszer mozgási energiáját a *K* rendszerben, és fejezzük ki azt a *K'* rendszerbeli adatokkal:



$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{TK})(\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{TK})$$

(itt alkalmaztuk az ábrán is feltüntetett Galilei transzformációt).
A műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

$$E_m = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(v_i'^2 + v_{TK}^2 + 2\mathbf{v}'_i \mathbf{v}_{TK}\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{TK}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{TK} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \,.$$

Az utolsó tagban szereplő összeg éppen a tömegközéppont sebessége a *K*' rendszerben, mivel azonban a *K'* rendszer a tömegközépponthoz van rögzítve, ez a sebesség nulla:

$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{TK}^2 \,.$$

Ebből rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \,,$$

vagyis a pontrendszer mozgási energiája felírható a tömegközéppontba képzelt össztömeg mozgási energiájának és a tömegközéppontban lévő megfigyelő által észlelt sebességekkel (v_i') számított mozgási energiák összegeként.
Ezzel a rendszer összenergiája

$$E_R = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + E_{hK} + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i'^2 + E_{hB} \,.$$

Ha a rendszer tömegközéppontjával együtt mozgunk (vagyis *K*=*K'*), akkor a tömegközéppont áll, tehát az első tag nulla, ha ezenkívül a rendszerre külső erők nem hatnak, akkor a külső helyzeti energia (második tag) is nulla, a maradék két tag ekkor tulajdonképpen a külső hatásoktól mentes rendszerrel együttmozgó megfigyelő által észlelt energiát adja meg. Ezt az

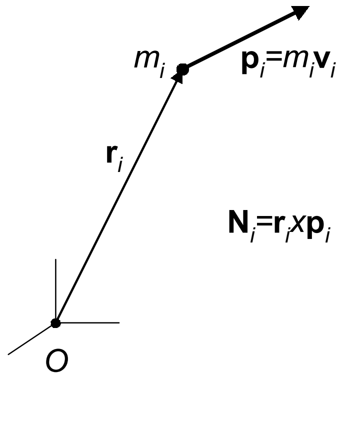
$$E_B = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i'^2 + E_{hB}$$

energiát *a rendszer belső energiájának* nevezzük, ami tehát a tömegközépponttal együttmozgó megfigyelő által észlelt mozgási energiák és a belső kölcsönhatásokból származó helyzeti energiák összege.

****

Perdület és forgatónyomaték, a perdületmegmaradás tétele pontrendszerben

A lendület és az energia bevezetését az indokolja, hogy ezekre a mennyiségekre bizonyos körülmények között megmaradási tétel érvényes. Ugyanez az oka a *perdület* (*impulzusmomentum*) (**N**) bevezetésének is.
Egy pontrendszer $\mathbf{r}_i$ helyvektorú, $\mathbf{p}_i$ impulzusú *i*-edik tömegpontjának $\mathbf{N}_i$ perdülete az *O* vonatkoztatási pontra (ábra):



$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \,.$$

A definícióból látszik, hogy a perdület függ a vonatkoztatási ponttól, tehát egyértelmű megadásához ezt is meg kell adni.
Ha a mozgó pontra ható erők $\mathbf{F}_i$ eredője nem nulla, akkor a sebesség, és egyúttal a perdület is változik. Ezt a változást megkaphatjuk a fenti egyenlet differenciálásával:

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

A jobboldal első tagja két párhuzamos vektor ($\mathbf{v}_i$ és $\mathbf{p}_i$) vektorszorzata, ezért ez a tag nulla, a második tagban pedig a lendület időderiváltja az eredő erővel egyenlő, ezért

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i .$$

A jobboldalon megjelenő mennyiséget az $\mathbf{F}_i$ erő O pontra vonatkozó *forgatónyomatékának* ($\mathbf{M}_i$) nevezzük. Ezzel a perdület megváltozása és az eredő forgatónyomaték között az alábbi összefüggést kapjuk

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \mathbf{M}_i .$$

Egy pontrendszer perdülete ($\mathbf{N}_R$) az egyes pontok perdületeinek összege, az eredő forgatónyomaték ($\mathbf{M}_R$) pedig az egyes pontokra ható forgatónyomatékok összege, vagyis a pontrendszerre vonatkozó egyenletet a pontokra vonatkozó egyenletek összeadásával kaphatunk. A korábban követett eljáráshoz hasonlóan, itt is szétválasztjuk a külső- és belső erők forgatónyomatékát:

$$\sum_I \frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Bi} .$$

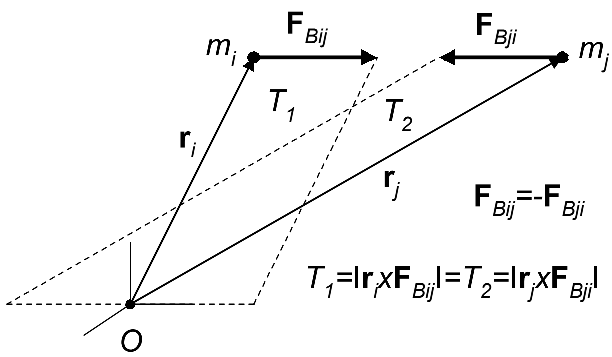
Newton III. törvénye és a forgatónyomaték definíciója alapján belátható (ábra), hogy a belső erők forgatónyomatékainak összege nulla lesz, így a rendszerre a

$$\frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} = \mathbf{M}_K$$

egyenletet kapjuk, ahol $\mathbf{M}_K$ a külső erők forgatónyomatékainak összege.

Ha a külső forgatónyomaték nulla, akkor a fenti egyenlet szerint

$$\frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_R = \text{állandó},$$



vagyis a perdület nem változik. Ez a *perdület megmaradásának tétele pontrendszerre*.

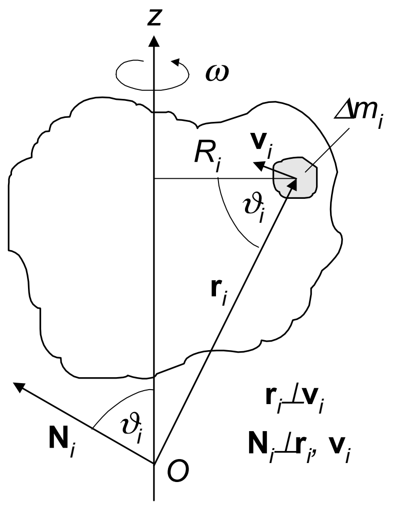
A merev test, mint pontrendszer

A perdület bevezetésének haszna – azon kívül, hogy megmaradási tétel érvényes rá – a merev test forgómozgásának leírásánál látható igen világosan, ebben az esetben ugyanis az eddig használt mozgásegyenlet alkalmazása nem praktikus.

A merev test olyan kiterjedt test, amely nem deformálható, tehát két tetszőleges pontja közötti távolság nem változik. Ha a merev testet igen kis térfogatelemekre osztjuk, akkor egymáshoz képest nyugalomban lévő pontszerű tömegek rendszereként tárgyalhatjuk. A leírás annál pontosabb, minél finomabb a test felosztása. Példaként írjuk fel egy rögzített tengely körül forgó merev test mozgásegyenletét, a pontrendszerekre érvényes összefüggések segítségével.

Az elemi tömegek (Δm_i), amelyekre a testet gondolatban felosztottuk, a rögzített tengely körül körmozgást végeznek (ábra) közös ω szögsebességgel, de különböző $\mathbf{v}_i$ sebességgel. Felírhatnánk az egyes tömegekre a szokásos mozgásegyenletet, ez azonban igen nagyszámú, nehezen kezelhető összefüggéshez vezetne, ezért mozgásegyenletként inkább a pontrendszer perdületének megváltozása és a külső forgatónyomaték közti összefüggést használjuk:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} .$$



Írjuk fel először az *i*-edik tömegelem perdületét:

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i \, .$$

Mivel a vektorszorzatban szereplő vektorok merőlegesek egymásra, a perdület nagysága

$$N_i = r_i \Delta m_i v_i \, .$$

A rögzített tengely miatt a perdületet csak a forgatónyomaték tengelyirányú komponense tudja változtatni (a másik két komponenst a tengely kikompenzálja), ezért mozgásegyenletnek és a perdületnek csak a tengelyirányú komponensét érdemes felírni. Vegyük fel a koordinátarendszerünk *z*-tengelyét a rögzített tengely irányában, és írjuk fel a fenti egyenlet *z*-komponensét:

$$N_{iz} = N_i \cos \vartheta_i = r_i \Delta m_i v_i \cos \vartheta_i \, .$$

Mivel a tengelytől mért távolság és a helyvektor hossza között fennáll az $R_i = r_i \cos \vartheta_i$ összefüggés, végül az

$$N_{iz} = N_i \cos \vartheta_i = R_i \Delta m_i v_i = \Delta m_i R_i^2 \omega_z$$

összefüggést kapjuk (itt felhasználtuk, hogy a körmozgásnál $v = R\omega$), aminek az az előnye, hogy benne az egyes tömegek sebességei helyett a közös szögsebesség szerepel.

A teljes test perdületének *z*-komponense ennek alapján közelítőleg:

$$N_z \approx \sum_i N_{iz} = \sum_i \Delta m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_i \Delta m_i R_i^2 \, .$$

Az összeget pontszerűnek tekinthető térfogatelemek esetén a testnek az adott tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékának* nevezik, és rendszerint θ -val jelölik:

$$\Theta_z \approx \sum_i \Delta m_i R_i^2 \, .$$

A tehetetlenségi nyomaték adott össztömeg esetén alapvetően a test tömegének a rögzített tengely körüli eloszlásától függ, vagyis nagyságát a test tömege, alakja és a tengely helyzete egyaránt befolyásolja, rögzített tengely esetén állandó.

A tehetetlenségi nyomaték felhasználásával a perdület *z*-komponense

$$N_z = \Theta\omega \, ,$$

a *merev test mozgásegyenlete* pedig

$$M_z = \frac{dN_z}{dt} = \frac{d(\Theta\omega)}{dt} \, .$$

Rögzített tengely esetén a tehetetlenségi nyomaték állandó, ezért a mozgásegyenlet

$$M_z = \Theta \frac{d\omega}{dt} = \Theta\beta \, ,$$

ahol β a forgó merev test szöggyorsulása. A kapott egyenlet formailag azonos a haladó mozgás egyenletével, csak az erő helyett forgatónyomaték, gyorsulás helyett pedig szöggyorsulás szerepel benne.

A tehetetlenségi nyomaték ismeretében (amit "szabályos" testnél integrálással, egyébként közelítő számítással vagy méréssel határozhatunk meg) adott külső forgatónyomaték esetén a mozgásegyenlet integrálásával megkapható a merev test szögsebessége és szögelfordulása az idő függvényében.

Ha a külső forgatónyomaték nulla, akkor a perdület állandó marad, ami a fentiek szerint azt jelenti, hogy ilyenkor a rögzített tengely körül forgó testre

$$\Theta\omega = állandó.$$

Ezt használja fel pl. a piruettező műkorcsolyázó, amikor kinyújtott karral elkezdett forgás után a karjait behúzza, azaz lecsökkenti a tehetetlenségi nyomatékát, és így – hogy a perdülete állandó maradjon – a szögsebessége megnő, és gyorsabb forgásba jön.