Anyagi pont dinamikája

Mi a mozgás oka?

Arisztotelész: a mozgás fenntartásához külső hatás kell. (Ezt a feltevést a felületes megfigyelés alátámasztja, hiszen egy test mozgásban tartásához általában tényleg erőt kell kifejteni.)

Galilei: egyenesvonalú egyenletes mozgás és nyugalom külső hatás nélkül zajlik, a *mozgásállapot megváltozásához* kell külső hatás. (A részletesebb vizsgálat során kiderült, hogy a testek megállását külső hatás okozza, amelynek csökkentésekor a test egyre hosszabb ideig marad mozgásban. Ebből extrapolálható, hogy ha nincs külső hatás, akkor a test nem áll meg.)

Alapkérdések:
Hogyan jellemezhető számszerűen a külső hatás?
Milyen a külső hatás és a mozgásállapotváltozás közti kapcsolat?
Külső hatás okozhat:

- alakváltozást
- sebességváltozást

Ennek alapján mérhető a külső hatás.

Erő és tömeg, a dinamika alaptörvényei

Az erő és tömeg bevezetésének a külső hatás által okozott változások típusa szerint két fő útját választhatjuk, most röviden vázoljuk a két lehetőséget.

Erő- és tömegdefiníció a külső hatás alakváltoztató képessége alapján

Alakváltozás alapján történő mérésnél pl. egy a hatás és a tömegpont közé helyezett – tehát a hatásnak kitett – rugalmas test (rugó) megnyúlása lehet a *hatás mértéke*. Elég kézenfekvő, hogy a hatásnak *iránya* van: különböző irányú hatások esetén egy test különböző irányokban indul el. A hatás irányát a közbeiktatott rugó tengelyének irányával adhatjuk meg.

Ahhoz, hogy a hatást mérni tudjuk, tudnunk kell, hogy milyen összefüggés van a hatás nagysága és a mérésre használt rugalmas test megnyúlása között: ez az ún. *skálatörvény*. A skálatörvényt önkényesen választhatjuk meg, de a szokásos (és célszerű) választás az, hogy – nem túl nagy hatások esetén – a hatás nagyságát arányosnak tekintjük az általa okozott megnyúlással, vagyis lineáris skálatörvényt használunk. Nulla értékűnek azt a hatást tekintjük, amely nem okoz megnyúlást.

A hatás egysége önkényesen választható (pl. a nehézségi erőtérben felfüggesztett, jól definiált test által a felfüggesztő testre kifejtett hatás), amihez a közbeiktatott rugalmas mérő test meghatározott kitérése tartozik. Ezután minden olyan hatást, amely a mérő testen ugyanekkora kitérést okoz, egységnyi hatásnak tekintünk.

A fenti módon definiált, mérhető vektormennyiség az *erő*, jelölése rendszerint $\mathbf{F}$.

Newton II. törvénye

A következő lépés a (most már mérhető) erő és a tömegpont gyorsulása közötti összefüggés kimérése. A mérések szerint földi körülmények között jó közelítéssel érvényes, hogy az erő által létrehozott gyorsulás az erővel egyirányú, nagysága pedig arányos az erő nagyságával:

$$\mathbf{F} \sim \mathbf{a}\,.$$

Ebből következik, hogy adott test esetén az *F/a* hányados állandó, a test jellemzője, gyorsítással szembeni ellenállásának, tehetetlenségének mértéke. Ez a *tehetetlen tömeg*, amelyet *m* betűvel szokás jelölni:

$$m = \frac{F}{a}\,.$$

(Megjegyezzük, hogy van egy másik tömeg is, az ún. súlyos tömeg, ami a gravitációs kölcsönhatásban való részvételt jellemzi. Ez, bár alapvetően más jellemzőnek tűnik, a tapasztalat szerint mégis arányos a tehetetlen tömeggel. Ezzel kapcsolatos témák: gravitációs kölcsönhatás, Eötvös-kísérlet, általános relativitáselmélet.)

Az erő és sebességváltozás kapcsolatát megadó törvény tehát (a Földön nyugvó rendszerben közelítőleg)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

alakba írható, amit *Newton II. törvénye* néven ismerünk.

A gyorsulást idő- és távolságmérés segítségével határozhatjuk meg, az erő mérése rugóval, a tömeg mérése a fenti összefüggés alapján történik.

A fenti eljárás során először az erő mérési utasítását adtuk meg, és ennek segítségével származtattuk a tömeget, az egységeket azonban eddig nem rögzítettük. Mivel az $F = ma$ összefüggésben két új mennyiség szerepel, az egyiknek az egységét önkényesen megválaszthatjuk, a másik egység ezután már az összefüggésből következik. A gyakorlatban először a tömeg egységét rögzítették. A tömeg egységeként *1 l* térfogatú *4 ^{0}C*-os tiszta víz tömegét választották, és ezt *1 kg*-nak nevezik. Ezután az erő egysége – amit *Newtonról* neveztek el – már származtatható:

$$1\ erőegység = 1kg \cdot 1\frac{m}{s^2} = 1Newton = 1N\,.$$

Eszerint az az erő *1 N* nagyságú, amely pl. *1 kg* tömegű testet *1 m/s^2* gyorsulással mozgat. Ez azt jelenti, hogy az erőmérő eszköz (rugó) skáláját ennek az egységnek a felhasználásával kell elkészítenünk.

Az, hogy egy test gyorsításához erő kell (a testek tehetetlenek), mégpedig annál nagyobb erő, minél nagyobb gyorsulást akarunk elérni, látványos, kvalitatív kísérletekkel szemléltethető.

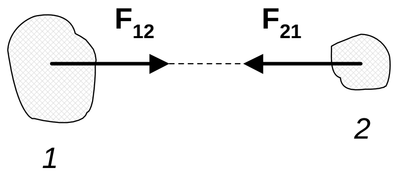
KÍSÉRLETEK:

- Cérnaszálra felfüggesztett fahengert az aljára erősített cérnaszál meghúzásával próbálunk gyorsítani. Ha az alsó cérnaszálat hirtelen, nagy erővel megrántjuk, vagyis a fahengert nagy gyorsulással akarjuk mozgatni, akkor a fahengerre kifejtendő – az alsó cérnaszálban ébredő – erő olyan nagy, hogy az alsó (gyorsító) cérnaszál nem bírja ki és elszakad. Ha az alsó cérnaszálat lassan, egyre nagyobb erővel húzzuk (a hengert kis gyorsulással akarjuk mozgatni), akkor az alsó cérnaszálban fellépő erő kicsi, viszont a hengert tartó cérna előbb-utóbb elszakad, mert a rá áttevődő erőt (húzóerő + a henger súlya) nem bírja ki. A fahenger tehetetlen, gyorsításához erő kell (mégpedig annál nagyobb, minél nagyobb gyorsulást akarunk elérni).
- Nehezebb tárgyat (pl. pezsgősüveg) papírlapra helyezünk, majd a papírlapot lassan húzni kezdjük. Ekkor az üveg a papírlappal együtt mozog. Ha a papírlapot hirtelen megrántjuk, akkor az üveg nem követi, és a papírlapot ki tudjuk húzni az üveg alól. Magyarázat: a gyors rántás esetén az üveg csak akkor tudná követni a papírt, ha ugyanolyan gyorsulással mozogna, ehhez azonban nagy erőre lenne szükség, amit a súrlódás nem képes biztosítani. Lassú indításnál a súrlódási erő elegendő az üveg gyorsításához. Az üveg tehetetlen, a gyorsításnak ellenáll.

Newton III. törvénye

Tapasztalati tény, hogy két egymással kölcsönhatásban álló (egymásra erőt kifejtő) test mindegyike ugyanakkora nagyságú, ellentétes irányú (azonos támadásvonalú) erőt fejt ki a másikra (ábra):

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} .$$



Ez *Newton III. törvénye*, amelynek lényeges fizikai tartalma az, hogy az erőhatás mindig *kölcsönhatás* eredménye: nem tudunk kifejteni semmilyen hatást úgy, hogy ne lépne fel rajtunk az ellenhatás.

A III. törvényt a II. törvénnyel kombinálva azt kapjuk, hogy fennállnak az

$$m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2 , \qquad m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} ,$$

összefüggések, illetve a tömeget állandónak tekintve, a

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} = -\frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt}$$

összefüggés. Ebből következik, hogy az $m\mathbf{v}$ mennyiség változása a kölcsönható testeken azonos nagyságú és ellentétes irányú, vagyis

$$\frac{d}{dt}\big((m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)\big) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \textit{állandó}.$$

Látható, hogy az $m\mathbf{v}$ mennyiség itt különleges szerepet játszik: a kölcsönható testekre ennek a mennyiségnek az összege nem változik, ezért külön fizikai mennyiségként vezették be. A

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

mennyiség az m tömegpont *lendülete* vagy *mozgásmennyisége* (gyakran az impulzus elnevezést is használják)

Ezzel a fenti eredmény így írható:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \textit{állandó},$$

vagyis, ha a két test csak egymással áll kölcsönhatásban, akkor összes lendületük (mozgásmennyiségük) nem változik. Ez a *lendület-megmaradás* (mozgásmennyiség-megmaradás, impulzus-megmaradás) *törvénye* két egymással kölcsönhatásban álló tömegpont esetén.

KÍSÉRLET_1:

- Két szembeállított, egymás felé gurulni képes zsámolyon álló két személy egy kötél két végét fogva egymást el akarja húzni. Bármilyen módon húzzák egymást (csak az egyik húz, a másik csak tartja a kötelet, csak a másik húz, az egyik csak tartja a kötelet vagy mindketten húzzák a másikat) *mindkét zsámoly elmozdul*, mégpedig nagyjából ugyanúgy. Az egyik test a másikra nem tud úgy erőt kifejteni, hogy a másik ne fejtene ki rá erőt.

KÍSÉRLET_2:

- Két kiskocsi közé rugót helyezünk, amit összenyomunk, és a rugót összenyomott állapotban cérnaszállal rögzítjük. A cérnaszálat elégetve a rugó *mindkét kocsit meglöki*. Ha az egyik kocsi tömege lényegesen nagyobb, mint a másiké, akkor ez a kocsi lassabban indul (kisebb távolságra megy el). Eredetileg a két kocsi összes lendülete nulla volt, ezért a cérnaszál elégetése után is nullának kell lennie. Emiatt a két kocsi lendületváltozása ellenkező irányú (és – amit itt pontosan nem tudunk igazolni – azonos nagyságú).

KÍSÉRLET_3:

- Műanyag zsinórra csúsztatható tartóban rögzítve szódavíz-patront helyezünk, majd a patront erre szolgáló tűs eszközzel kiszúrjuk. A CO_2 gáz nagy sebességgel kiáramlik a patronból, a patron pedig ellenkező irányban végigcsúszik a zsinóron (rakéta). Eredetileg nulla lendületű rendszerben belső kölcsönhatással lendületet létrehozva (gáz kiáramlása), ellenkező irányú lendületnek kell keletkeznie (patron mozgása).

A lendülettel Newton II. törvénye (a tömeget állandónak tekintve) átírható még az

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

alakba is. Ebből a felírásból látható, hogy ha egy tömegpontra nem hat erő, akkor a lendülete megmarad (ami nyilvánvaló, hiszen ilyenkor a sebessége állandó).

Az erőhatások függetlenségének elve (Newton IV. törvénye)

Newton II. törvényét eddig úgy fogalmaztuk meg, hogy a tömegpontra egyetlen erő hat. Külön vizsgálandó az az eset, amikor a tömegpont nem egyetlen erő hatásának van kitéve, hanem több test fejt ki rá erőt egyidejűleg.

A kísérletek azt mutatják, hogy ilyenkor az egyes erőkre külön-külön teljesül Newton II. törvénye, vagyis az egyes erők egymástól függetlenül fejtik ki a hatásukat a tömegpontra. Ez az *erőhatások függetlenségének elve* (gyakran nevezik Newton IV. törvényének is).

Ennek következménye, hogy ha pl. egy tömegpontra két erő hat, akkor az egyik erő által okozott gyorsulás

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{m},$$

függetlenül attól, hogy működik-e másik erő, a másik erő által okozott gyorsulás pedig

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{m}.$$

Mivel a gyorsulás vektormennyiség, a pont eredő gyorsulása:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m},$$

vagyis a tömegpont úgy mozog, mintha a rá ható erők vektori összege hatna rá. Több erő együttes hatása esetén – ennek megfelelően – Newton II. törvénye az erők vektori összegére, az ún. *eredő erőre* érvényes:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots.. + \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \ldots.m\mathbf{a}_n = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F}_{eredő} = m\mathbf{a}.$$

Az tehát, hogy az erők egymástól függetlenül fejtik ki hatásukat, azzal egyenértékű, hogy *az erők vektorként viselkednek, vektorként összegezhetők*, mint a gyorsulások.

Ha tehát egy tömegpontra több erő hat egyidejűleg, akkor a II. Newton-törvénnyel kapcsolatos összes fenti megállapításunk érvényes marad, csak a tömegpontra ható erők helyére az erők vektori összegét, az eredő erőt kell beírni.

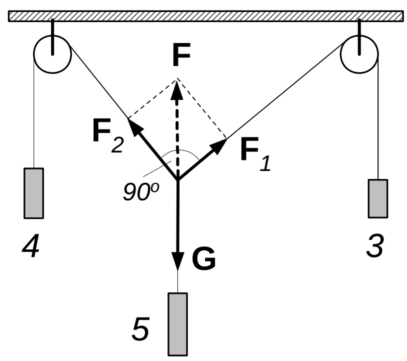
A IV. törvényből az is látszik, hogy egy eredetileg nyugvó tömegpont nem csak akkor marad *egyensúlyban* (nyugalomban), ha nem hat rá erő, hanem akkor is, ha a *rá ható erők eredője nulla*. A fenti esetben a tömegpont helyén ható erők dinamikai szempontból egymás hatását kioltják. Ezt gyakran úgy fogalmazzák meg, hogy ebben az esetben az egy pontban ható *erők egyensúlyban vannak*.

KÍSÉRLETEK:

- Ha az erő a többi hatástól függetlenül fejti ki hatását egy tömegpontra, akkor a különböző hatásokra bekövetkező mozgások is egymástól függetlenül mennek végbe. Két egyforma golyó egyikét vízszintesen elhajítva, a másikat pedig ugyanakkor elejtve, a két golyó egyszerre koppan a talajon. A golyók függőleges irányú mozgása ugyanúgy megy végbe, bár az egyik vízszintes irányban is mozog.
- Ugyanezt igazolja az a kísérlet, amikor egy nehezékkel ellátott posztó darabot elejtünk, és ugyanakkor, ugyanabból a magasságból, a posztódarab eredeti helye felé egy nyilat vízszintesen kilövünk. A nyíl mindig eltalálja a posztódarabot, vagyis egyszerre vannak ugyanabban a magasságban, azonos módon zajlik a függőleges irányú mozgásuk.

KÍSÉRLET:

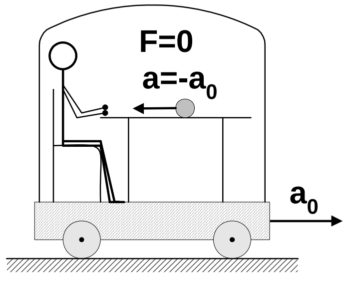
- Két azonos magasságban elhelyezett csigán egy kötelet vetünk át, és a kötél egyik végére 3 egységnyi-, a másik végére 4 egységnyi-, a közepére pedig 5 egységnyi tömeget erősítünk (ábra). A súlyokat elengedve, azok beállnak egy egyensúlyi helyzetbe, amelyben a két csiga közti kötélszakasz a középső súlynál megtörik. Bármilyen kezdő állapotból hagyjuk magára a rendszert, a két csiga közti kötélszakasz két része *egymással derékszöget zár be*. A függőlegesen lefelé mutató **G** (súly) erőt tehát – az adott súlyok esetében – az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erő csak akkor tudja kompenzálni, ha egymásra merőlegesek.



A merőleges beállást könnyen értelmezhetjük, ha feltételezzük, hogy az erők vektorként viselkednek[1]. A választott súlyok (erők) esetén fennáll az $F^2 = F_1^2 + F_2^2$ összefüggés ($F_1=3$ egység, $F_2=4$ egység, és $F=5$ egység), ami a derékszögű beállás miatt megfelel a vektorábrából kapható összefüggésnek. Ez azt jelenti, hogy a **G** súllyal valóban a két másik erő vektori összege tart egyensúlyt $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\mathbf{G}$. Az erők tehát vektorként összegezhetők.

Newton I. törvénye, az inerciarendszer fogalma

A dinamika alaptörvényeit a Földhöz képest nyugvó vonatkoztatási rendszerekben végzett kísérletek többé-kevésbé alátámasztják. Könnyen belátható azonban, hogy vannak olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a törvények biztosan nem teljesülnek. Ennek demonstrálására végezzük el az alábbi gondolatkísérletet. Egy megfigyelő egy lefedett kocsiban ül, amelyből a környezetét nem látja (ábra). A kocsiban van egy



[1] A kísérlet értelmezéséhez tudni kell, hogy a testek súlya arányos a tömegükkel, továbbá, hogy a csigán átvetett kötélre akasztott súlyok a csiga másik oldalán is a súlyukkal azonos erőt fejtenek ki, amelynek iránya a kötél irányával egyezik.

vízszintes, sima asztallap, amelyen egy sima felületű, gömb alakú golyó áll. Ha a kocsit óvatosan gyorsítjuk – úgy, hogy a megfigyelő ne érezze a gyorsulást – akkor a megfigyelő azt fogja tapasztalni, hogy a golyó gyorsul és álló helyzetből elindulva az ölébe esik. Newton II. törvénye szerint, a megfigyelő ezt úgy értelmezi, hogy a golyóra fellépett egy erő. Ilyen erőt azonban nem talál (a külső szemlélő tudja, hogy nincs is ilyen erő), ezért nem érti, hogy a golyó miért gyorsult. (A külső szemlélő azt állapítja meg, hogy hozzá képest a golyó nem gyorsul, és helyben marad, a kocsiban ülő megfigyelő azért látja gyorsulni a golyót, mert a kocsi gyorsul, és kiszalad a golyó alól.)

Vagyis egy gyorsuló testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben olyan testeket is gyorsulni látunk, amelyekre ható erők eredője nulla, ilyen rendszerben tehát Newton II. törvénye (eredeti formájában) nem érvényes.

Emiatt szükség van annak lerögzítésére, hogy milyenek azok a vonatkoztatási rendszerek, ahol a Newton-törvények használhatók. Amikor *Newton I. törvénye* (*a tehetetlenség törvénye*) azt mondja ki, hogy *minden test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg valamilyen külső hatás nem éri*, lényegében azt fogalmazza meg, hogy olyan rendszerekkel foglalkozunk, amelyekben a fenti állítás, azaz a tehetetlenség törvénye igaz. Az ilyen rendszereket *tehetetlenségi-* vagy *inerciarendszereknek* nevezik.

Az *I.* törvény tehát azt fogalmazza meg, hogy

- inerciarendszerek léteznek, és
- a többi Newton-törvények – eredeti formájukban – inerciarendszerekben érvényesek.

A megfelelő vonatkoztatási rendszer kiválasztásának módszere lényegében abban áll, hogy megfigyelünk egy *magára hagyott* testet, és megnézzük, hogy gyorsul-e vagy nem. Ha nem gyorsul, akkor az adott rendszer inerciarendszer, és itt használhatjuk a Newton-törvényeket, ha viszont gyorsul akkor a rendszer nem inerciarendszer, és a Newton-törvények ott nem érvényesek.

A Föld szigorúan véve nem inerciarendszer (forog és kering, tehát bármely pontjának gyorsulása van), de különleges pontosságot igénylő esetektől eltekintve, közelítőleg annak tekinthető.

Erő- és tömegdefiníció a külső hatás mozgásállapot-változtató képessége alapján

A külső hatás másik – könnyen észlelhető eredménye az, hogy megváltoztatja a testek mozgásállapotát (azaz gyorsulást okoz). Ennek felhasználásával a tömeg definícióját lehet egyszerűbben megadni.

A tehetetlen tömeg bevezetése

Mozgásállapot-változás alapján a tömeg (és az erő) definíciója úgy történhet, hogy egymással kölcsönhatásban álló két testnek a kölcsönhatás által okozott sebességváltozását ($\Delta\mathbf{v}_1$ és $\Delta\mathbf{v}_2$) mérjük meg különböző esetekben.

A mérésekből kiderül, hogy a két test sebességváltozása mindig ellenkező irányú, a változások nagyságának aránya pedig ugyanazon két test esetén mindig ugyanakkora, függetlenül a két test kezdeti sebességétől.

$$\Delta\mathbf{v}_1 = -K_{21}\Delta\mathbf{v}_2\,, \qquad \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{\Delta v_1'}{\Delta v_2'} = ... = K_{21} = \text{állandó}\,.$$

Az ütközésben a tapasztalat szerint mindig a "kisebb" ill. "könnyebb" test sebességváltozása nagyobb, ennek megfelelően a sebességváltozás-arány nő, ha a *2* test méretét növeljük (pl. ütköző kocsik esetén a kocsira rakott test mellé további testeket helyezünk), és csökken, ha az *1* test méretét növeljük. Durván szólva: a K_{21} mennyiség arányos a *2* és *1* testek "anyagmennyiségének" hányadosával. Ennek alapján bevezethetünk egy mennyiséget, ami az egyes testeknek az ütközésben tanúsított viselkedését jellemzi. Ezt a mennyiséget a testek tehetetlen tömegének nevezzük, *m*-mel jelöljük, és úgy definiáljuk, hogy a két kölcsönható test tömegének hányadosa az ütközésben meghatározható K_{21} mennyiséggel egyenlő:

$$\mathrm{K}_{21} = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Az ütközéses kísérlet alapján tehát csak a két kölcsönható test tömegének arányát tudjuk definiálni. Ahhoz, hogy egy test tömegét meghatározzuk, választani kell egy testet, amelynek tömegét önkényesen egységnyinek tekintjük: $m_0 = 1\,tömegegység$.

Az ismeretlen tömegű testet ezzel a testtel ütköztetve, megmérjük a $K = \dfrac{\Delta v_0}{\Delta v}$ mennyiséget, és ebből az ismeretlen tömeg a $K = \dfrac{m}{m_0}$ összefüggés alapján:

$m = Km_0 = K\ \ tömegegység$.

A lendület és az erő bevezetése, a Newton-törvények származtatása

A tömeg bevezetése után az ütközésre vonatkozó tapasztalatainkat az

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 = -m_2 \Delta \mathbf{v}_2,$$

$$m_1(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1) = -m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

összefüggésekkel írhatjuk le, ahol a vesszőtlen sebességek az ütközés előtti, a vesszős sebességek az ütközés utáni sebességeket jelentik. Az utolsó összefüggés az $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ mennyiség megmaradásának tételét fejezi ki. Ezt a mennyiséget nevezzük most is *lendületnek*.

Az ütközési kísérletben két kölcsönhatásban álló test mozgását vizsgáltuk. Gyakran azonban csak a kölcsönható testek egyikének mozgása érdekel bennünket, ezért felmerül a kérdés, hogyan lehet egy test mozgásállapot-változását meghatározni úgy, hogy a másik test jelenlétét külső (erő)hatásnak tekintjük. Ehhez először azt kell tisztázni, hogy milyen összefüggés van a test mozgásállapot-változása és a hétköznapi értelemben rá gyakorolt erő között.

Ha egy vízszintes terepen lassan felénk gördülő kocsit meg akarunk állítani, és nem számít, hogy ezt mennyi idő alatt tesszük meg, akkor a célt viszonylag kis erőfeszítés árán elérhetjük, ha a kocsival együtt hátrálva hosszabb idő alatt lassítjuk le. Ha azonban a megállításra csak rövid idő áll rendelkezésre (pl. a kocsi vészesen közeledik a falhoz), akkor a megállítás nagy erőfeszítést kíván. Másrészt az erőkifejtés mindkét esetben függ attól is, hogy mekkora a megállítandó kocsi tömege (kis tömegnél nyilván kisebb a szükséges erőfeszítés). Vagyis a mozgásállapot-változtatáshoz szükséges erőfeszítést egyrészt a lendületváltoztatás nagysága, másrészt a változtatásra fordított idő szabja meg. Az erőfeszítés nagysága a tapasztalat szerint arányos a lendületváltoztatással és fordítva arányos a változtatás idejével, vagyis a $\dfrac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ hányadossal jellemezhető.

Ha egy *m* és egy *M* tömegű tömegpont kölcsönhatását vizsgáljuk, akkor a fentiek alapján a kölcsönhatás során fennáll a

$$\Delta(m\mathbf{v}_m) = -\Delta(M\mathbf{v}_M)$$

összefüggés. Az egyenletet Δt-vel osztva, majd végtelenül kicsi időtartamra áttérve, a

$$\frac{d(m\mathbf{v}_m)}{dt} = -\frac{d(M\mathbf{v}_M)}{dt},$$

illetve

$$\frac{d(\mathbf{p}_m)}{dt} = -\frac{d(\mathbf{p}_M)}{dt}$$

összefüggést kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az m tömeg lendületváltozásának sebessége, ami a változáshoz szükséges "erőfeszítést" adja meg, kifejezhető a M tömeg adataival. Ezek alapján az m tömegre ható $\mathbf{F}_m$ *erőt úgy definiálhatjuk*, hogy

$$\mathbf{F}_m = -\frac{d\mathbf{p}_M}{dt}.$$

Az erőnek ezt a definícióját használva, az m tömegre felírhatjuk az

$$\mathbf{F}_m = \frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} = m\mathbf{a}_m$$

összefüggést, ami azt fejezi ki, hogy a tömegpontra ható erő arányos a tömegpont gyorsulásával. Ez *Newton II. törvénye*.

Mivel két test kölcsönhatására a fentiek szerint mindig érvényes, hogy

$$\frac{d(\mathbf{p}_1)}{dt} = -\frac{d(\mathbf{p}_2)}{dt},$$

az erő fenti definíciója alapján teljesül a

$$-\mathbf{F}_{21} = \frac{d(\mathbf{p}_1)}{dt} = -\frac{d(\mathbf{p}_2)}{dt} = \mathbf{F}_{12}$$

összefüggés, ami *Newton III. törvénye*.

Ha egy m tömegű tömegponttal egyidejűleg több tömegpont (m_1, m_2, m_3, …) áll kölcsönhatásban, akkor a tapasztalat szerint az egyes kölcsönhatásokra továbbra is érvényesek a két tömegpont kölcsönhatására vonatkozó korábbi megállapításaink, vagyis *a kölcsönhatások egymást nem befolyásolják*. Ha az egyes kölcsönhatásokra vonatkozó $m(\Delta\mathbf{v})_i = -\Delta(m_i\mathbf{v}_i)$ egyenleteket összeadjuk, akkor megkapjuk a m tömegpont teljes sebességváltozására vonatkozó összefüggést:

$$m\Delta\mathbf{v} = -\sum_i \Delta(m_i\mathbf{v}_i).$$

Itt $(\Delta\mathbf{v})_i$ a m tömegnek az i-edik tömeggel való kölcsönhatásából származó sebességváltozása, a teljes sebességváltozás pedig ezek vektori összege: $\Delta\mathbf{v} = \sum_i (\Delta\mathbf{v})_i$. A fenti egyenletet Δt-vel osztva, majd végtelenül kicsi időtartamra áttérve, az

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \sum_i \left(-\frac{d(m_i\mathbf{v}_i)}{dt}\right) = \sum_i \mathbf{F}_i$$

egyenletet kapjuk, ahol $\mathbf{F}_i$ az i-edik tömeg által a m tömegre kifejtett erő. Vagyis a m tömegpont mozgására Newton II. törvényét ilyenkor a tömegpontra ható erők vektori összegével kell felírni, ami *Newton IV. törvénye*.

A mozgásegyenlet és alkalmazásai

Newton II. törvénye összefüggést ad a tömegpontra ható erők és a tömegpont gyorsulása között. Mivel ez az összefüggés teszi lehetővé a mozgás leírását, *mozgásegyenletnek* is nevezik. A mozgásegyenletet két célra használhatjuk fel.

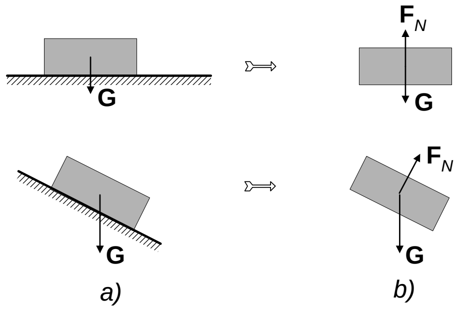
A legkézenfekvőbb és leggyakoribb felhasználás az, hogy a tömegpontra ható erő(k) ismeretében a mozgásegyenlet segítségével meghatározzuk a mozgó pont helyvektorának időfüggését, vagyis matematikailag leírjuk a mozgást.
A mozgásegyenlet egy másik lehetséges felhasználása az, hogy ismert mozgáshoz meghatározzuk azt az erőt, amely az adott mozgást létrehozza.

Az erőhatások legfontosabb típusai

Ahhoz, hogy a mozgásegyenletet megoldjuk, ismernünk kell a tömegpontra ható erőket. Most röviden foglalkozunk néhány fontos erőtípussal, amelyeket a klasszikus fizikai mozgásproblémák megoldásánál gyakran használnak.

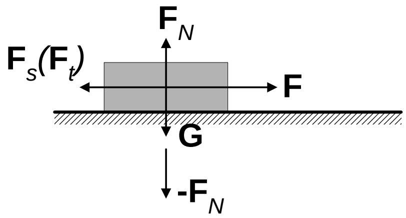
Kényszererő

Az erőnek egy sajátos, konkrét kölcsönhatási típustól független – és gyakran előforduló – fajtája lép fel akkor, ha egy test mozgását valamilyen külső kényszerítő körülmény korlátozza. Ez történik például akkor, amikor egy testet valamilyen külső hatás olyan felülethez nyom, amelyen nem tud áthatolni. A gyakorlatban előforduló ilyen eset, hogy a testre a nehézségi erő hat, és mozgását egy vízszintes sík felület vagy egy lejtő jelenléte korlátozza. Az ilyen felület megakadályozza, hogy a test a felület alá kerüljön, vagyis a test nem mozdulhat el a síkra merőlegesen lefelé (*a)* ábra). Az ilyen mozgást korlátozó külső feltételeket *kényszereknek* nevezzük. A kényszer működését az említett esetekben úgy foghatjuk fel, hogy a testre egy $\mathbf{F}_N$ „tartó erő" lép fel, amit *kényszererőnek* nevezünk. A test mozgását ilyenkor úgy írhatjuk le, hogy a kényszer (az áthatolhatatlan sík) hatását a mozgásegyenletben az $\mathbf{F}_N$ kényszererővel vesszük figyelembe (*b)* ábra).



Súrlódási erő

Ha egy kényszernek kitett testre a kényszerfeltétel által megengedett elmozdulás irányában ható erő is működik, akkor fellép egy sajátos fékező erő, az ún. *súrlódási erő*. Ennek közismert példája az az eset, amikor a vizsgált testet egy külső hatás egy felülethez nyomja (pl. az ábrán a $\mathbf{G}$ nehézségi erő), és működik a felülettel párhuzamos erő ($\mathbf{F}$) is. Ilyenkor a felület egy az elmozdulást fékező, súrlódási erőt fejt ki. Kis erőnél a test odatapad a felülethez, és nem mozdul el, mert egy ún. *tapadási erő* ($\mathbf{F}_t$) kompenzálja a külső erőt (*tapadási súrlódás*). A tapadási erőnek azonban van egy – az érintkező felületek minőségétől függő – maximális értéke ($\mathbf{F}_t^{max}$), ezért ha ennél nagyobb erőt fejtünk ki, akkor a test csúszni kezd. A csúszás közben fellép egy állandó fékező erő, az ún. *csúszási súrlódási erő* ($\mathbf{F}_s$), amely mindig a mozgásiránnyal ellentétes (*csúszási súrlódás*).



A tapadási erő maximális értéke és a csúszási súrlódási erő is közelítőleg arányos a testet a felülethez nyomó erővel ($\mathbf{F}_N$).
Az álló test esetén fellépő maximális tapadási erőt az

$$\mathbf{F}_t^{max} = \mu_t \mathbf{F}_N ,$$

a mozgó test esetén fellépő csúszási súrlódási erőt pedig az

$$\mathbf{F}_s = \mu \mathbf{F}_N$$

alakban írhatjuk fel, ahol μ_t illetve μ a felületek minőségétől függő szám, az ún. *tapadási-* illetve *csúszási súrlódási együttható*. A tapasztalat szerint $\mu_t > \mu$, vagyis a tapadási erő maximális értéke mindig nagyobb, mint a csúszási súrlódási erő.

Gravitációs kölcsönhatás, a súlyos tömeg

A tapasztalat szerint bármely két test között fellép egy olyan kölcsönhatás, amelynél a testekre ható erő – azonos anyagú testeket feltételezve – a kölcsönható testek térfogatával arányos. Ezt a kölcsönhatást *gravitációs kölcsönhatásnak* nevezik. A Földön egy test súlyát a Föld és a test között fellépő gravitációs kölcsönhatás okozza.

Ha a két test kölcsönhatást okozó anyagi tulajdonságát m_{s1}-gyel illetve m_{s2}-vel jelöljük, akkor két pontszerűnek tekinthető (azaz a távolságukhoz képest elhanyagolható méretű) test között fellépő erő nagyságát a Newton által megállapított törvény szerint az

$$F_g = \gamma \frac{m_{s1} m_{s2}}{r^2}$$

összefüggés adja meg, ahol r a két pontszerű test távolsága. Az erő vonzó, és a két testet összekötő egyenes mentén hat. Az m_s tulajdonságot a kölcsönható test *súlyos tömegének* nevezik. Az összefüggésben két ismeretlen mennyiség van: az m_s súlyos tömeg és a γ arányossági tényező, az ún. *gravitációs állandó*. A törvény igaznak bizonyult nem pontszerű, de *gömb alakú* testekre is, ha távolságukat a centrumuk távolságával azonosnak tekintjük.

Ha önkényesen definiáljuk, hogy mennyi az m_s súlyos tömeg egysége (pl. azt mondjuk, hogy *1 liter* víz súlyos tömegét tekintjük egységnyinek), és ezt az egységet *1 kg*-nak nevezzük, akkor az egységnyi tömegek között meghatározott távolságban fellépő erőt megmérve, kiszámítható a γ arányossági tényező egysége és nagysága (ezt a mérést először Cavendish végezte el). A jelenleg használt *kg*-definíció esetén a mérések szerint $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2 / kg^2$.

A tapasztalat szerint a Föld felszínéhez közel a testekre ható gravitációs erő jó közelítéssel $F_g \approx G = mg$ alakban adható meg, ahol g egy adott helyen minden testre ugyanaz az érték. (Megjegyezzük, hogy egy test adott helyen mért súlya nem pontosan a gravitációs erővel egyenlő, mert a Föld forgása miatt fellépő ún. centrifugális erő ezt kissé módosítja. Ezzel később foglalkozunk.)

****************** ********************* *******************

Az $F_g \approx G = mg$ összefüggés a gravitációs törvénnyel összhangban van. A Föld (M) és a test (m) között fellépő erő a gravitációs törvény alapján (a Földet gömbnek tekintve, és a tömegét a középpontban elképzelve)

$$F_g = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2},$$

ahol R a Föld sugara, h a testnek a Föld felszínétől mért magassága. Ha a test a felszín közelében van, akkor $R + h \approx R$, tehát a gravitációs erő az

$$F_g = \gamma \frac{M}{R^2} m$$

alakba írható. A g mennyiséget ezek szerint közelítőleg a $g \approx \gamma \frac{M}{R^2}$ összefüggés adja meg, ami csak a Föld adataitól és a gravitációs állandótól függ (az adatok behelyettesítésével *9,81 m/s²* értéket kapunk).

****************** ********************* *******************

A testekre ható erő (F) a testeket gyorsítja (a), és ennek alapján bevezettük a tehetetlen tömeget az $m_t = \frac{F}{a}$ összefüggéssel. Ez a tömeg adott anyagú test esetén szintén a térfogattal arányosnak mutatkozik. Felmerül a kérdés, hogy a két teljesen különböző módon bevezetett tömeg azonos vagy különböző.
A közelítő vizsgálat alapján a két tömeg azonosnak látszik, ugyanis a tapasztalat szerint a Földön a gravitációs erő által gyorsított test gyorsulása (a_g) nem függ a test anyagától és méretétől, és ugyanaz a g érték, mint amit a testre ható gravitációs erő méréséből kapunk:

$$F_g = m_s g \quad \textit{illetve} \quad F_g = m_t a_g \approx m_t g$$

$$m_s g \approx m_t g$$

$$\frac{m_s}{m_t} \approx 1.$$

A kérdés azonban elvi jelentőségű, ezért pontos vizsgálatnak is alávetették. Az első komoly mérést ezzel kapcsolatban Eötvös Loránd végezte el, és nagy pontossággal megállapította a súlyos és tehetetlen tömeg azonosságát: a kétféle tömeg hányadosa a mérési hiba figyelembe vételével csak a *9*-edik tizedesjegyben térhet el az *1*-től (a legújabb mérések szerint eltérés csak a *11*-dik jegyben lehet).

Elektrosztatikus kölcsönhatás
Egymáshoz képest nyugalomban lévő, elektromosan töltött testek között a töltésük miatt fellép egy ún. *elektrosztatikus kölcsönhatás*, amelynek eredményeként a két test között vonzó vagy taszító erő lép fel, attól függően, hogy töltésük ellentétes- vagy azonos előjelű. A Coulomb által megállapított törvény szerint két pontszerűnek tekinthető töltés között fellépő erő nagysága:

$$F_{elszt} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

ahol Q_1 és Q_2 a töltések nagysága, K_e a töltés egységétől függő állandó, r pedig a töltések közötti távolság. A törvény formailag megegyezik a gravitációs kölcsönhatást leíró törvénnyel, ezért a kétféle kölcsönhatás között számos analógia áll fenn. A töltés jelenleg használatos egysége (*1 C=1 As*) esetén az állandó $K_e = 9 \cdot 10^9 \ Nm^2/C^2$.

A mozgás leírása az erő ismeretében
Ha ismerjük a tömegpontra ható erőket, akkor a mozgásegyenlet segítségével meghatározhatjuk a tömegpont gyorsulását:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}_{eredő}(t)}{m}.$$

A gyorsulásból a korábban megismert módon kiszámíthatjuk a tömegpont sebességének és helyvektorának időfüggését

$$\mathbf{a}(t) \xrightarrow{\textit{integrálás}} \mathbf{v}(t) \xrightarrow{\textit{integrálás}} \mathbf{r}(t)$$

Ezt az eljárást a *mozgásegyenlet megoldásának* vagy a mozgásegyenlet *integrálásának* nevezzük, aminek során – ha ismerjük a kezdeti feltételeket – eljutunk a mozgás teljes leírásához.

Példaként vizsgáljunk meg, néhány mozgást, amelyet ismert erőhatás okoz. Ezekben az esetekben a valóságban többnyire nem pontszerű testek mozgásáról van szó. Később látni fogjuk, hogy bizonyos esetekben (haladó mozgás) a kiterjedt testek mozgása is leírható a tömegpontra vonatkozó összefüggésekkel. Az alábbiakban mindig azt tételezzük fel, hogy ez az egyszerűsítés alkalmazható.

Mozgás állandó erő hatására

Ilyenkor $\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}=\acute{a}lland\acute{o}$, tehát $\mathbf{a}(t)=\frac{\mathbf{F}(t)}{m}=\frac{\mathbf{F}}{m}=\mathbf{a}=\acute{a}lland\acute{o}$, amiből a sebesség és a helyvektor időfüggése a már ismert módon kapható meg. Ilyen erő lép fel a Föld felszínéhez közeli testekre, amely függőlegesen lefelé hat, és nagysága $G=mg$.

Mozgás súrlódással

A csúszó testek mozgását a fentiek alapján egyszerűen leírhatjuk. Mivel a csúszási súrlódási erő mindig a testnek a felülethez viszonyított sebességével ellentétes irányú, az x-tengely mentén súrlódva mozgó, m tömegű test mozgásegyenlete F_N nagyságú nyomóerő esetén

$$F_x = F - \mu F_N = ma_x .$$

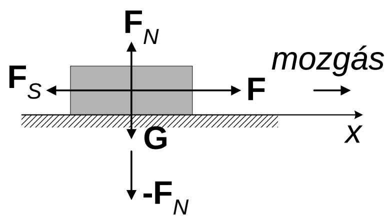
Itt F a testre ható x-irányú állandó erő (ábra). Eszerint

$$a_x = \frac{F-\mu F_N}{m} = \acute{a}lland\acute{o} ,$$

amiből a sebesség és a helykoordináta időfüggése a már ismert módon megkapható.

Az F_N erőt mindig a konkrét körülmények határozzák meg. Gyakori eset, hogy érintkezési felületre merőleges komponense csak a nehézségi erőnek van, ilyenkor a nyomóerő éppen ez a komponens lesz. Vízszintes érintkezési síknál (ábra) ezért $F_N = mg$, így a gyorsulás:

$$a_x = \frac{F}{m} - \mu g .$$



Lejtőn mozgó test esetén a helyzet annyival bonyolultabb, hogy ekkor a felületeket összenyomó erő nagysága nem azonos a nehézségi erővel (ábra). A test y-irányban nem mozog, tehát az $\mathbf{F}_e$ eredő erő y-komponensére a mozgásegyenlet alapján fennáll, hogy

$$F_{ey} = F_N - G_N = ma_y = 0 ,$$

így

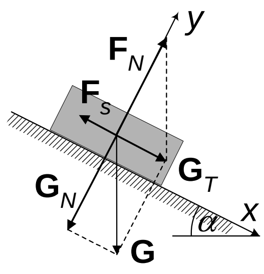
$$F_N = G_N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha .$$

A mozgásegyenlet x-komponense pedig

$$F_{ex} = G_T - F_s = ma_x$$

vagyis

$$mg\sin\alpha - F_s = ma_x .$$



Figyelembe véve a súrlódási erőre vonatkozó összefüggést és a nyomóerőre kapott kifejezést, a gyorsulás x-komponense

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) .$$

Mozgás közegellenállással

Vizsgáljuk meg most azt, hogy egy levegőben közegellenállással mozgó, szabadon eső test sebessége hogyan változik az időben.

A közegellenállás nem túl nagy sebességeknél arányos a test sebességével és azzal ellentétes irányú:

$$\mathbf{F}_{ke} = -k\mathbf{v} .$$

A mozgás függőleges egyenes mentén zajlik, így a koordinátarendszerünk *z*-tengelyét függőlegesen lefelé irányítva a mozgásegyenlet:

$$ma_z = mg - kv_z .$$

Az egyenletből világosan látszik, hogy a test sebessége nem érhet el akármekkora értéket, hiszen egy idő után a növekvő sebesség miatt a fékező erő nagysága eléri az állandó nehézségi erő értékét. Ekkor az eredő erő nulla lesz, a test nem gyorsul tovább: $a_z = 0$. Ekkor a mozgásegyenlet a $0 = mg - kv_z$ alakot ölti, amiből az állandósult sebesség megkapható: $v_z^{áll} = \frac{mg}{k}$. (Ez a probléma ún. aszimptotikus megoldása.)

****************** *********************** *********************

A mozgásegyenlet megoldásával természetesen nem csak a végsebesség, hanem a sebesség (illetve a *z*-koordináta) időfüggése is megkapható. Ehhez írjuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$m\frac{dv_z}{dt} = mg - kv_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{k}{m}v_z$$

$$\frac{dv_z}{g - \frac{k}{m}v_z} = dt.$$

Ez az egyenlet (ami egy ún. szétválasztható differenciálegyenlet) a két oldal integrálásával könnyen megoldható. Szabadesést feltételezve ($v_0 = 0$), a végeredmény:

$$v_z(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - exp\left\{-\frac{k}{m}t\right\}\right).$$

A sebesség a $t >> \frac{m}{k}$ esetben egy állandósult értékhez tart: $v_z(\infty) = \frac{mg}{k}$.

****************** ******************* *******************

Mozgás gravitációs erő hatása alatt

A gravitációs kölcsönhatás ismeretében leírhatjuk egy tömegnek (*m*) egy másik tömeg (*M*) jelenlétében történő mozgását. Ennek tipikus példája a bolygók Nap körüli mozgása. Mivel a Nap tömege (*M*) sokkal nagyobb, mint a bolygóé (*m*), a probléma úgy tárgyalható, mintha a Nap nem mozogna. Ekkor a bolygó Naphoz viszonyított helyét megadó **r** helyvektorra felírható az

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

mozgásegyenlet, amelyből a bolygó pályája, keringési ideje és a Kepler által megállapított törvényszerűségek levezethetők (itt $\frac{\mathbf{r}}{r}$ a Naptól a bolygó felé mutató egységvektor).

A Föld felszínéhez közel a gravitációs erő függőlegesen lefelé ható, állandó erő, amelynek nagyságát közelítőleg az ismert, *G=mg* összefüggés adja meg. A mozgásegyenlet ilyenkor

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} .$$

Ha a koordinátarendszert úgy választjuk meg, hogy a z-tengely függőlegesen lefelé mutat, akkor az egyenletben szereplő erő-vektor komponensei: $\mathbf{G}(0,0,mg)$. Így a gyorsulásra az $\mathbf{a}(0,0,g)$ eredmény adódik, amiből – a kezdősebesség ismeretében – a már tárgyalt hajítások egyenleteit kapjuk.

Ismert mozgást létrehozó erő meghatározása a mozgásegyenlet alapján

Előfordul, hogy a mozgást magát már ismerjük (pl. állandó gyorsulású mozgás, körmozgás, rezgőmozgás), és kíváncsiak vagyunk, hogy ilyen mozgás létrehozásához milyen erőre van szükség.

Állandó gyorsulású mozgás

Ha a gyorsulás állandó, akkor az $\mathbf{F}_e = m\mathbf{a}$ mozgásegyenlet alapján az eredő erőnek is időben állandónak kell lennie, vagyis ilyen mozgást $\mathbf{F}_e$=*állandó* erő hoz létre.

Körmozgás

A körmozgás esetén a pálya egy adott helyén egy érintő irányú $\mathbf{a}_T = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T$ és egy centrum felé mutató $\mathbf{a}_N = r\omega^2\mathbf{u}_N$ gyorsuláskomponens lép fel. Gyorsuló körmozgás létrehozásához tehát a tömegpontra az adott helyen egy érintő irányú $\mathbf{F}_T = m\mathbf{a}_T = m\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T$ és egy centrum felé mutató $\mathbf{F}_N = m\mathbf{a}_N = mr\omega^2\mathbf{u}_N$ erőkomponens szükséges. Utóbbi, a körpálya középpontja felé mutató erőt *centripetális erőnek* ($\mathbf{F}_{cp}$) nevezik. Ennek nagysága $F_{cp} = F_N = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$. Ha a sebesség nagysága nem változik (egyenletes körmozgás), akkor a körmozgás egyedül az állandó nagyságú (de változó irányú!) centripetális erő hatására alakul ki. Ez az az erő, amely a körpályán való haladáshoz szükséges irányváltozást létrehozza.

Harmonikus rezgőmozgás

Egy egyenes (pl. az x-tengely) mentén harmonikus rezgőmozgást végző tömegpontnál a helyvektor időfüggése definíció szerint: $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, amiből a gyorsulásra azt kapjuk, hogy $a_x = -\omega^2 x$. A mozgásegyenlet alapján tehát ilyen mozgást $F_x = ma_x = -m\omega^2 x = -Dx$ alakú erő hoz létre (itt bevezettük a $D = m\omega^2$ jelölést). Ez az erő a kitéréssel arányos és mindig azzal ellentétes irányú (tehát az egyensúlyi helyzet felé mutat).