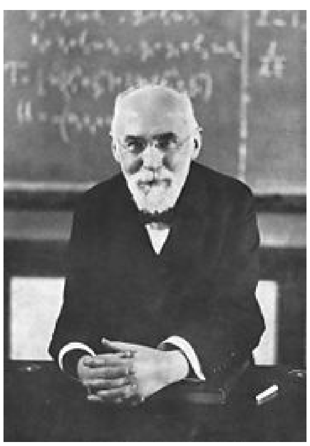
A Lorentz transzformáció néhány következménye

Abban az esetben, ha létezik egy sebesség, amely minden inercia rendszerben egyforma nagyságú, akkor az egyik inercia rendszerből az áttérést a másik inercia rendszerre a következő transzformáció írja le:

$$\begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

A fenti képlet esetén a két rendszert úgy választottuk meg, hogy koordináta tengelyeik párhuzamosak legyenek és a K' rendszer a z-tengellyel párhozamosan mozogjon v sebességgel a K rendszerhez képest. A képletben c-vel jelöltük a kitüntetett sebességet. A valóságban a fény terjedési sebessége az a sebesség, amely minden inercia rendszerben állandó nagyságú, hozzávetőleg $c = 3 \times 10^8\ m/s$. Az előző képletből egyszerűen leolvashatjuk, hogy két inercia rendszer közötti sebesség nem haladhatja meg a fénysebességet, hiszen akkor képzetes mennyiségeket kapnánk a transzformált koordinátákra, ami fizikailag nem értelmezhető.

1. Lorentz kontrakció



Hendrik Antoon Lorentz

Vegyünk egy l hosszúságú rudat, amelynek az egyik végét helyezzük a K és K' rendszer közös origójába. Mérjük meg a hosszát a K' rendszerben, vagyis adjuk meg a végpont $z' = l'$ koordinátáját $t' = 0$-ban. Persze a K rendszerben más időben leszünk és itt a rúd másik vége a $z = l$ pontban lesz, vagyis a v sebességgel mozgó rendszerben más hosszat fogunk mérni, mint a rúdhoz képest álló rendszerben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ l' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ l \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Az előzőekből a következő két egyenletet kapjuk:

$$t = \frac{lv}{c^2} \tag{3}$$

$$l' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} l \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \tag{4}$$

tehát
$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{5}$$

A mozgó rendszerben tehát a rudat rövidebbnek mérjük! Ezt a jelenséget hívjuk Lorentz kontrakciónak. Persze nyugodtabbak lennénk, ha egy rúd hosszát egyértelműen meg tudnánk mondani, ezért a rúd hosszát célszerű a rúddal együtt mozgó inercia rendszerben mérni.

2. Idő dilatáció

Egy egyenletes v sebességgel mozgó részecske saját rendszerében az idő másként telik mint azt a laboratóriumi rendszerben mérjük. A részecskével együtt mozgó rendszert választhatjuk úgy, hogy a részecske mindig az origóban helyezkedik el. A Lorentz transzformáció ekkor a következő alakú lesz:

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} .$$

Soronként kiírva a következő egyenleteket kapjuk:

$$z = vt\ , \quad t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ ,$$

amelyből következik, hogy $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, vagyis a laboratóriumi rendszerben hosszabb időt mérünk, mint a tömegponttal együtt mozgó rendszerben. A speciális relativitás elmélet eme jelenségét hívjuk idő dilatációnak. Ennek a jelenségnek sokkal könnyebb kísérletileg a nyomára akadni, mint a Lorentz kontrakciónak. Az egyik legismertebb példa bizonyos könnyű részecskék, a müonok bomlásához kapcsolódik. A müonok a leptonok családjába tartoznak, így az elektronok rokonai. Legtöbbször a kozmikus részecskék és a légkör részecskéinek ütközéskor keletkeznek nagyjából 20 km-re a föld felszínétől. Az élettartamuk $\tau = 2.2\times10^{-6}\ s$, így ha még fénysebességgel is repülnek, legfeljebb 660 métert tehetnek meg, ennek ellenére a föld felszínén is tudjuk detektálni őket. Ennek oka, hogy a saját órájuk lassabban jár, mint a mi földfelszínhez kötött óránk. Természetesen azokat a fizikai folyamatokat, amelyek a részecske bomlását okozzák a részecskével együtt mozgó rendszerben kell leírnunk és számára az idő is a saját rendszeréhez kötött óra szerint múlik. A Lorentz transzformációnak megfelelően τ idő alatt, ameddig el nem bomlik a részecske, $z = v\tau/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ távolságot tesz meg. Tegyük fel, hogy a müonunk a fénysebesség 99%-val halad, ekkor elbomlásáig a mi rendszerünkben 3.4 km-t tesz meg a 0.66 km-rel szemben.

A részecskével együtt mozgó rendszer nem feltétlenül inercia rendszer, de egy infinitezimálisan rövid ideig tekintsük úgy, mintha egyenletes, egyenesvonalú mozgást végezne egy inercia rendszerben, majd a következő pillanatban egy új sebességgel mozog egyenletesen és így tovább. Ekkor a labor rendszerben eltelt időből a következő integrállal számíthatjuk ki a részecskével együtt mozgó rendszerben eltelt időt:

$$\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \tag{6}$$

Ez a mennyiség, amelyet sajátidőnek hívunk, minden inercia rendszerben ugyanaz marad, vagyis invariáns a Lorentz transzformációval szemben.

3. Sebességek összeadása

Vizsgáljuk most a következő problémát: mekkora sebességgel mozog egy részecske a K' redszerben, amely a K rendszerben v sebességgel mozog? A K' rendszer mozogjon V sbességgel K-hoz képest. Tegyük fel, hogy kezdetben a részecske a két rendszer közös origójában volt. t idő mulva K-ban a $z = vt$ helyen lesz, a K' redszerben pedig a t', $z' = v't'$ pontban. A két téridő pontot a Lorentz transzformáció köti össze:

$$\begin{pmatrix} t' \\ v't' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c^2} \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix} \tag{7}$$

Vagyis

$$t'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = t - \frac{Vv}{c^2}t \tag{8}$$

$$v't'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = -Vt + vt \tag{9}$$

A két egyenletből v' egyszerűen kifejezhető:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} \tag{10}$$

Ha v helyére a fénysebességet, c-t helyettesítjük be, akkor a K' rendszer beli v' sebességre, elvárásainknak megfelelően, ugyancsak a fénysebességet kapjuk.

4. Invariáns ívelem

Az 1 számú képlet a K rendszer beli időt és helyet transzformálja át a K' beli idővé és hellyé. Azonban egy kicsit slampos dolog az, hogy ha egy vektornak tekintjük a (t, z) mennyiséget, akkor a komponenseknek különböző mértékegysége van. Ezt a problémát egyszerűen orvosolhatjuk, ha az időszerű koordinátát megszorozzuk a fénysebességgel, amely állandó minden inercia rendszerben. Ebben az esetben a következő alakba írhatjuk a transzformációt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} \tag{11}$$

Mutassuk meg, hogy a $(ct)^2 - z^2$ mennyiség invariáns a Lorentz transzformációval szemben:

$$
\begin{aligned}
&(ct, \quad z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} = (ct', \quad z') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \\
&\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} (ct, \quad z) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} = \\
&(ct, \quad z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{12}
$$

Az $(ct, \quad z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix}$ mennyiség invariáns a Lorentz transzformációval szemben, ezért definiáljuk a kétdimenziós téridőnkben a skalár szorzatot ezzel a művelettel:

$$
u_\mu v^\mu = (ct_1, \quad z_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{13}
$$

ahol $u_1 = ct_1$, $u_2 = z$ és a metrikus tenzor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Természetesen egyszerűen terjeszthetjük ki a skalárszorzatot háromdimenziós térre is, csak a metrikus tenzor lesz 4x4-es mátrix:

$$
\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{14}
$$

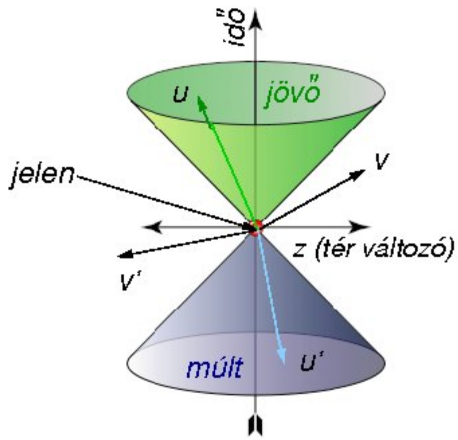
a négyes helyvektor pedig $(ct, \mathbf{r})$ négyes lesz. A sebesség a helyvektor idő szerinti deriváltja. Ha azonban az éppen aktuális inercia rendszer ideje szerint deriválunk, akkor az eredmény nem fog megfelelni a Lorentz transzformációnak, vagyis az eredmény nem egy négyes vektor lesz. A négyes sebességet ezért a négyes helyvektor sajátidő szerinti deriváltjaként definiáljuk:

$$
v_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{du_\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} , \tag{15}
$$

$$
v = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} . \tag{16}
$$

5. Fénykúp

Ábrázoljuk a téridőnket egy 1+2 dimenziós koordináta rendszerben. (Csak két térszerű koordinátánk van az egyszerűbb ábrázolás végett, persze aki átlátja a négydimenziós teret, az átrajzolhatja 1+3 dimenzióba is.) A $t = 0$ pillanatban az origóban vagyunk, az ábrán látható kúpok csúcsában. Ha elindítunk egy fénysugarat, az a felső kúp palástján fog mozogni, egy korábban felénk indított fénysugár pedig az alsón. Az ábrán az u, u', v, v' vektorok egy-egy esemény helyét és idejét adják. Figyelembe véve, hogy a kölcsönhatásoknak véges a terjedési sebességük, az egyes eseményeket a következőképpen osztályozhatjuk:



- u egy esemény a jövőben, amelyre hatással lehetünk $\quad (uu) > 0$
- u' egy esemény a múltban, amely hatással lehet ránk $\quad (uu) > 0$
- v egy esemény a jövőben, amelyre nem lehetünk hatással $\quad (vv) < 0$
- v' egy esemény a múltban, amely nem lehet hatással $\quad (vv) < 0$

A fénykúp w pontjában lévő esemény esetén, természetesen, a (ww) skalárszorzat nulla lesz.