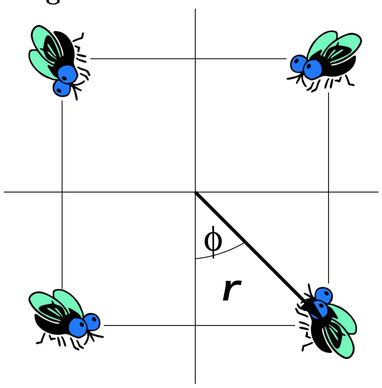
1. **Legyek a négyzet sarkain**
Négy légy ül egy a oldalhosszúságú négyzet négy sarkán és egymást figyelik. A négy légy egyszerre indul el állandó v_0 sebességgel úgy, hogy mindig a tőlük jobb felé eső légy felé haladnak.

a.) Mennyi idő múlva találkoznak?

b.) Milyen pályán mozognak?

Megoldás



Az első légy koordinátáit az $(r(t), \varphi(t))$ polár koordinátákkal adhatjuk meg.

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos(\varphi) \\
y_1 &= r\sin(\varphi) \\
\dot{x}_1 &= \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\
\dot{y}_1 &= \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi)
\end{aligned}$$

A második légy koordinátáit nyilvánvalóan $90°$-os elforgatással kaphatjuk az első légy koordinátáiból:

$$\begin{aligned}
x_2 &= -r\sin(\varphi) \\
y_2 &= r\cos(\varphi)
\end{aligned}$$

Egyszerűen kiszámíthatjuk a két légy közötti távolságot:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2}r$$

Miután a az első légy mindig a második felé halad, a sebességét egyszerűen megadhatjuk a koordinátáik különbségének a segítségével:

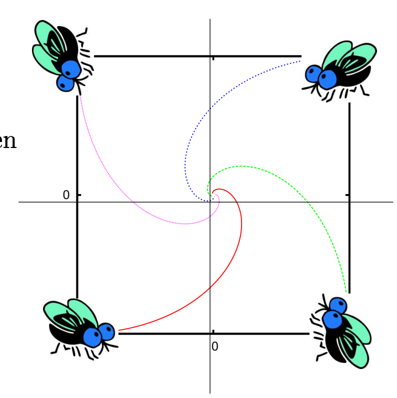
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_0\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}r} = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}\left(\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\right) \\
\dot{y}_1 &= v_0\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{2}r} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\left(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\right)
\end{aligned}$$

A sebességeket is polár koordinátákkal kifejezve a követkző egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}
-\dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi) &= -\frac{v_0}{\sqrt{2}}\left(\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\right) \\
\dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi) &= \frac{v_0}{\sqrt{2}}\left(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\right)
\end{aligned}$$

Az előző egyenletekből egyszerűen kifejezhetjük a sebesség radiális és tangenciális komponenseit:

$$\dot{r} = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \qquad r\dot{\varphi} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

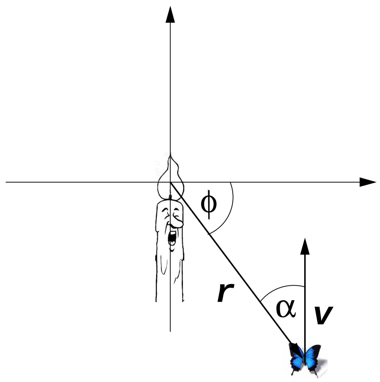


Figyelembe véve a határfeltételeket a differenciál egyenlet könnyen integrálható:

$$r(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a - v_0 t\right), \quad \varphi(t) = -\varphi_0 ln\left(\frac{a - v_0 t}{a}\right)$$

2. **A pillangó halála**

Alkonyatkor gyakran megfigyelhetjük, ha gyertyát gyújtunk, hogy egyes lepkék spirális pályán belerepülnek a gyertya lángjába. Mi okozhatja ezt az öngyilkos viselkedést? A lepkék az evolúció során kialakult tájékozódási stratégiájuk áldozatává válnak. Ráérő biológusok megállapították, hogy ezek a lepkék a nap, vagy a hold helyzetét használják a navigációhoz. Úgy repülnek, hogy közben állandó szög alatt lássák a fényforrást, ezzel stabilizálva a repülés irányát. Nézzük meg mi történik akkor, ha a fényforrás nem nagy távolságban helyezkedik el a lekétől.



Legyen a lepke sebességének a nagysága állandó v. A lepke sebességének és helyvektorának skalárszorzata megegyezik a helyvektor hosszának és a sebességük nagyságának valamint a közöttük lévő szög koszinuszának a szorzatával:

$$\frac{\vec{r}\vec{v}}{rv} = -\cos(\alpha) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ v_x &= \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ v_y &= \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ \vec{r}\vec{v} &= r\dot{r} \end{aligned}$$

Végül a 1 egyenletet a következő egyszerű alakba írhatjuk:

$$\frac{\dot{r}}{v} = -\cos(\alpha)$$

A differencál egyenlet megoldása $r = r_0 - vt\cos(\alpha)$ függvény lesz, ahol r_0 a lepke kezdeti távolsága a gyertyalángtól. A φ szög időbeli változására is felállíthatunk egy egyszerű egyenletet:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = v^2\cos^2(\alpha) + r^2\dot{\varphi}^2, \;\Rightarrow\; v^2\left(1 - \cos^2(\alpha)\right) = r^2\dot{\varphi}^2, \;\Rightarrow\; \frac{v}{r}\sin(\alpha) = \dot{\varphi}$$

$$\frac{v\sin(\alpha)}{r_0 - vt\cos(\alpha)} = \dot{\varphi}$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát integrálva 0-tól t-ig a következő egyenletet kapjuk φ-re:

$$\varphi(t) = \varphi_0 - tg(\alpha)ln\left(\frac{r_0 - vt\cos(\alpha)}{r_0}\right)$$

A szerencsétlen lepke, tehát, logaritmikus spirálon kerül egyre közelebb és közelebb a végzete felé, mígnem elenyészik a gyertya lángjában.