A Newton egyenletek gyorsuló koordináta rendszerekben

1. A Newton axiómák

A kinematika pontrendszerek mozgásának a leírásával foglalkozik, de nem vizsgálja a mozgások kiváltó okait. A testek dinamikáját, az egyes tömegpontok gyorsulásának okait a Newton axiómák segítségével tárhatjuk fel:

- Ha egy testre nem hat erő, akkor egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez.
- A test impulzusának változási rátája megegyezik a testre ható erők eredőjével:
  $$\frac{dp}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{1}$$
  Ha a test tömege állandó, akkor az előző képletet a jól ismert
  $$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{2}$$
  alakba írhatjuk. Változó tömegű testre jó példa a rakéta, amelyből a kiáramló hajtóanyag folyamatosan csökkenti a tömegét.
- Ha az a testre a b test $\mathbf{F}_{ab}$ erővel hat, akkor a b testre az a test $-\mathbf{F}_{ab}$ erővel hat.

Tételezzük fel, hogy a tömegpontok tömege állandó és induljunk ki a 2. számú egyenletből. Ha N tömegpontuk van, akkor N darab mozgásegyenletet írhatunk fel:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^k + \sum_j \mathbf{F}_{ij} \ , \tag{3}$$

ahol $\mathbf{F}_i^k$ a külső erők eredőjét, $\mathbf{F}_{ij}$ pedig a belső, vagyis a testek között fellépő erőket jelöli. Összegezzük most az egyenlet mindkét oldalát. A belső erők összege a 3. axióma miatt nyilvánvalóan eltünik, így:

$$\sum_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^k \tag{4}$$

Szeretnénk egy új mennyiséget bevezetni, amelyre igaz Newton 2. törvénye. Legyen ez a következő vektor:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M} \qquad M = \sum_i m_i \tag{5}$$

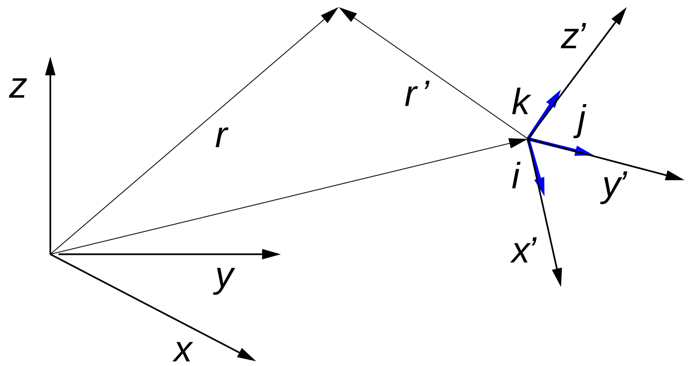
Ekkor az előző, 4 egyenletet a következő formába írhatjuk:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_i \mathbf{F}_i^k \ , \tag{6}$$

vagyis a külső erők eredője megegyezik az általunk bevezetett vektor időszerinti második deriváltjával. Az 5. számű vektort tömegközőppontnak nevezzük. Vagyis a tömegközéppont mozgását úgy írhatjuk le, mintha minden tömeget és erőt egy pontba koncentrálnánk. Ha a külső erők eredője nulla, akkor a tömegpont egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez.

2. A mozgásegyenlet gyorsuló koordináta rendszerekben

Természetesen a különböző inercia rendszerekben a mozgásegyenlet alakja mindig a 2. számú egyenlet marad. Azt szeretnénk, hogy gyorsuló koordináta rendszerekben is ugyan ez az alak maradjon meg, vagyis a jobb oldalon legyen a test tömege szorozva a gyorsulással a bal oldalon pedig az erők eredője. Először is írjuk fel egy tömegpont helyzetét meghatározó vektort egy inercia és egy gyorsuló rendszerben.



$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \tag{7}$$

Vezessük be a gyorsuló rendszerben a rendszer koordináta tengelyeivel párhuzamos **i**, **j**, **k** egységvektorokat. Ezek segítségével az előző helyvektort a következőképpen adhatjuk meg:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \ , \tag{8}$$

ahol x',y', z' rendre a három Descartes koordinátát jelöli a gyorsuló rendszerben. Először határozzuk meg a helyvektorok idő szerinti első deriváltját:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{x}'\mathbf{i} + \dot{y}'\mathbf{j} + \dot{z}'\mathbf{k} + x'\dot{\mathbf{i}} + y'\dot{\mathbf{j}} + z'\dot{\mathbf{k}} \tag{9}$$

Az egységvektorok deriváltjaihoz tekintsünk először egy általános időfüggő egységvektort: $|\mathbf{u}(t)| = 1$. Miután a vektor hossza rögzített, a vektort egy t időben egy forgatással kaphatjuk a $t = 0$ idejű vektorból: $\mathbf{u}(t) = R(t)\mathbf{u}(0)$. Deriváljuk le idő szerint az előző kifejezést: $\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{R}(t)\mathbf{u}(0) = \dot{R}(t)R^{-1}(t)\mathbf{u}(t)$. Vizsgáljuk meg az $\dot{R}(t)R^{-1}$ mátrix tulajdonságait. Nyilvánvalóan $R(t)R^{-1}(t) = 1$ ezért ennek idő szerinti deriváltja eltünik,

$$\frac{d}{dt}(R(t)R^{-1}(t)) = \dot{R}(t)R^{-1}(t) + R(t)\dot{R}^{-1}(t) = 0 \ .$$

Egy becsületes forgatás mátrix transzponáltja megegyezik az inverzével, ezt kihasználva az előző összefüggést a következő alakba írhatjuk:

$$\dot{R}(t)R^{-1}(t) = \left(\dot{R}(t)R^{-1}(t)\right)^T \ ,$$

vagyis az $\dot{R}(t)R^{-1}(t)$ mátrix antiszimmetrikus lesz. Kihasználva azt a tényt, hogy egy antiszimmetrikus mátrixszal való szorzás helyettesíthető egy megfelelő vektorral való keresztszorzásnak, az egységvektor deriváltját a következő képpen adhatjukl meg:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \tag{10}$$

Alkalmazzuk az összefüggésünket a helyvektor deriváltjára kapott 9 számú kifejezésre:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{x}'\mathbf{i} + \dot{y}'\mathbf{j} + \dot{z}'\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}x' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}y' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}z' \;. \tag{11}$$

A jobb oldalon álló első tag a gyorsuló koordinátarendszer origójának a sebességét adja, a második tag a gyorsuló rendszerben adja meg a tömegpont sebességét $\mathbf{v}' = \dot{x}'\mathbf{i}+\dot{y}'\mathbf{j}+\dot{z}'\mathbf{k}$, a harmadik tag pedig $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$. Tehát a tömegpont inercia rendszerbeli sebességét kifejezhetjók a gyorsuló koordináta rendszerbeli sebességgel, a vonatkoztatási rendszer sbességével és szögsebességével:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \tag{12}$$

Deriváljuk mégegyszer az előző kifejezést azért, hogy felírhassuk a mozgásegyenletet:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{R}} + \ddot{x}'\mathbf{i} + \ddot{y}'\mathbf{j} + \ddot{z}'\mathbf{k} + \dot{x}'\dot{\mathbf{i}} + \dot{y}'\dot{\mathbf{j}} + \dot{z}'\dot{\mathbf{k}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times \left(\dot{x}'\mathbf{i} + \dot{y}'\mathbf{j} + \dot{z}'\mathbf{k} + x'\dot{\mathbf{i}} + y'\dot{\mathbf{j}} + z'\dot{\mathbf{k}}\right) \\ &= \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \end{aligned} \tag{13}$$

Az utolsó tagot kifejtve végül a következő kifejezést kapjuk:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'\right) - \mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}^2 \tag{14}$$

Az inercia rendszerben felírt mozgásegyenlet a szokásos alakú:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \;. \tag{15}$$

A gyorsuló koordinátarendszerbeli változókkal felírva:

$$m\mathbf{a}' + m\left(\ddot{\mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'\right) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - \mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}^2\right) = \mathbf{F} \tag{16}$$

Ha azt szeretnénk, hogy a gyorsuló koordinátarendszerben is ugyanolyan alakja legyen a mozgásegyenletnek, mint az inercia rendszerben, akkor be kell vezetnünk úgy nevezett tehetetlenségi vagy inercia erőket:

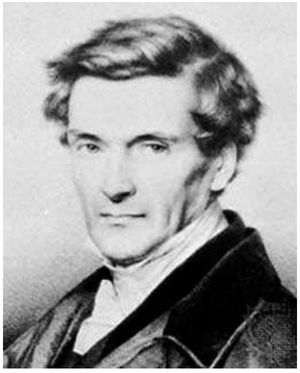
$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t \tag{17}$$

Összevetve a 16 számú és 17 számú egyenleteket a tehetetlenségi erők leolvashatóak:

$$\mathbf{F}_t = -m\ddot{\mathbf{R}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'\right) + m\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}^2 - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \tag{18}$$

Fontos megjegyezni, hogy a tehetetlenségi erők nem ható erők. Bevezetésükre csak azért volt szükség, hogy a mozgásegyenletek formailag ugyanúgy nézzenek ki a gyorsuló rendszerben is mint az inercia rendszerben.

Vizsgáljuk meg a 18. számú egyenletben szereplő, úgy nevezett, tehetetlenségi erőket. Az első tag a mozgó koordináta rendszer origójának a gyorsulását adja. Ha egy autóban ülve rálépünk a gázra, akkor az autóval együtt mozgó rendszerben leírva a mozgást, ez az erő nyom bele minket az ülésbe. A harmadik és negyedik tag a centrifugálius erő, amit akkor érzünk, amikor kanyarodás közben nekidőlünk a 7-es busz korlátjának a csuklórésznél. Ez az erő a szögsebesség és a mozgó rendszer orogójából az adott pontba mutató vektor által meghatározott síkba esik. A második tagra, a Coriolis erőre általában nem szoktunk felfigyelni, habár számos fontos effektus magyarázatához szükség van rá.



Gustave-Gaspard de Coriolis (1792-1843)

Gustave-Gaspard de Coriolis 1792-ben született Párizsban, egyetemi tanulmányait az École Polytechnique-ben végezte Cauchy vezetésével. 1835-publikálta cikkét a forgó koordinátarendszerekben fellépő tehetetlenségi erőkről, amely az egész világon ismertté tette. Coriolis cikke inspirálta 1851-ben Leon Foucault ingakísérletét, amellyel a föld forgását sikerült kimutatni. A kísérlet során a párizsi Panthéonban egy 67 m hosszú dróton felfüggesztett nehéz súly lengett. Az inga mozgás során a mozgás síkja fokozatosan elfordult a Coriolis erő hatására.

A Coriolis erő más természeti jelenségek kialakulásában is fontos szerepet játszik. A passzát szélrendszerek irányának különbségét az északi és a déli féltekén is ennek az erőnek köszönhetjük. Hasonlóan fontos szerepe van a térítőköri magas és a sarkköri alacsony légnyomás kialakulásában.

Leon Foucault (1819-1868)