Mire emlékszünk a középiskolában tanultakból

Pontrendszerek mechanikája

Alapvető mennyiségek:

mennyiség	definíció	mértékegység
Hely: $\mathbf{r}_i$	i-ik részecske koordinátái	m
Sebesség: $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i$	a hely idő szerinti első deriváltja	m/s
Gyorsulás: $\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$	a hely idő szerinti második deriváltja	$\mathrm{m/s^2}$
Tömeg: m	a test tehetetlen tömege	kg
Erő: $\mathbf{F}_i$	az i-ik részecskére ható erő	N

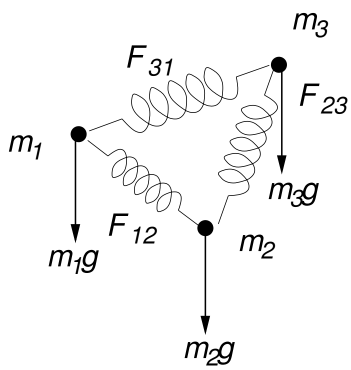
Axiómák:

1. **A tehetetlenség törvénye** Minden test nyugalomban marad vagy az egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, míg más testek hatása mozgásállapotának megváltoztatására nem készteti.

2. **Erő és tömeg kapcsolata**
$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

3. **Hatás–ellenhatás törvénye** Ha egy testre egy másik $\mathbf{F}$ erővel hat, akkor amásik testre az egyik ugyanekkora $-\mathbf{F}$ erővelhat.

Külső erők, belső erők:



Tekintsünk n tömegpontot, amelyek kölcsönhatnak egymással. Gondoljunk arra, hogy mindegyik egy rugóval van a másikhoz erősítve. Ezeket az $\mathbf{F}_{ij}$ erőket, amelyek az egymás közötti kölcsönhatás eredményeként jönnek létre, belső erőknek hívjuk. Tegyük fel, hogy a tömegpontok a Föld gravitációs terében mozognak. A tömegpontok $m_i\mathbf{g}$ súlyát külső erőnek hívjuk. Newton harmadik törvényének az értelmében

$$\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} = 0 \; .$$

Írjuk fel Newton második törvényét a tömegpontokra:

$$\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \; ,$$

ahol $\mathbf{F}_{ij}$ belső, $\mathbf{F}_i$ pedig külső erőket jelöl. Összegezzük az egyenlet jobb és baloldalát:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Kihasználtuk, hogy a belső erők összege eltünik. Vezessük be a teljes pontrendszer $M = \sum_i m_i$ tömegét. Ennek segítségével az előző egyenletet a következő alakba írhatjuk át:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = M\ddot{\mathbf{R}} \; ,$$

ahol bevezettük

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

tömegközéppont fogalmát. Vagyis a külső erők eredője megegyezik a pontrendszer tömege szorozva a tömegközéppont gyorsulásával. Ha a külső erők összege eltünik, akkor nyilvánvalóan:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0\,,$$

tehát

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{állandó}\,,$$

amely nem más mint az impulzus (lendület) megmaradás törvénye. Vagyis ujabb két mennyiséggel gazdagodtunk: tömegközéppont, impulzus.

Mozgási és potenciális energia:

A munkát az elmozdulás és az erő skalár szorzataként definiáltuk: $W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{s}$, ahol $\Delta\mathbf{s}$ egy kicsiny elmozdulás. Egy tetszőleges pálya mentén a munkát egy vonal menti integrál segítségével határozhatjuk meg, amelyben $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v} dt\,, \quad \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1\,,\ \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$$

Használjuk ki a $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}$ Newton egyenletet:

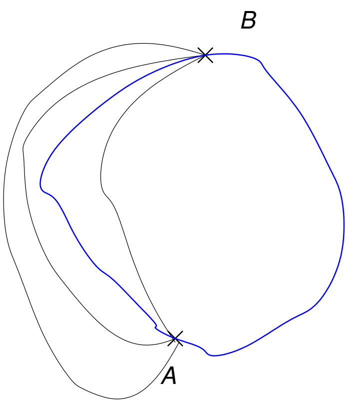
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v} dt = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} dt = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2\,,$$

vagyis összefoglalva:

$$W = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2\,,$$

amelyet a középiskolában munka tétel néven tanultunk (tanítottak). Egy tömegponton végzet munka annak u.n. mozgási energiáját növeli. Egy tömegpont mozgási energiája az előzőek alapján: $E_k = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$.

Ha egy darab krétát felemelünk az asztalról h magasságba, akkor a krétán mgh munkát végeztünk. Ha elengedjük a krétát, akkor az asztalba csapódáskor éppen $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = mgh$ mozgási energiája lesz. Vagyis h magasságban mgh potenciális energiája – munkavégző képessége – lesz, amely a szabad esés során fokozatosan átalakul mozgási energiává úgy, hogy a mozgás során az $E = mgh + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ mennyiség állandó marad. Természetesen az előző vizsgálódások során eltekintettünk a légellenállástól. Próbáljuk meg egy kicsit pontosabban definiálni a potenciális energiát.



Vigyünk egy m tömegpontot az A pntból a B pontba, majd B-ből vissza A-ba. Ha nincs surlódás (nem disszipatív a rendszer), akkor a végzett munkának nullának kell lennie:

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0\,. \tag{1}$$

Tekintsünk az $F(\mathbf{r})$ erőre mint egy (lineáris) vektor térre: az $F(\mathbf{r})$ az az erő, amely egy tömegpontra hat az $\mathbf{r}$ pontban. Hogyan tudunk olyan erőteret konstruálni, amely megfelel az 1. számú egyenletben kirótt feltételnek. A Stokes tétel segítségével írjuk át a vonal menti integrált egy felületi integrállá.

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = \oint \text{rot}\mathbf{F} d\mathbf{A} = 0\,. \tag{2}$$

(A Stokes tétel vázlatos bizonyítása pl.itt található.)

Az előző egyenletnek tetszőleges zárt görbe mentén teljesülnie kell, amelyből következik, hogy $\text{rot}\mathbf{F} = 0$.

Ha az $\mathbf{F}$ vektorteret egy skalár tér gradienseként állítjuk elő, $\mathbf{F} = -\nabla V$, akkor $\mathrm{rot}\mathbf{F} = -\mathrm{rot}\nabla V = 0$

A $\mathbf{F}$ vektortér rotációját a következő parciális deriváltakkal definiáljuk:

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial r_y} - \frac{\partial F_y}{\partial r_z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial r_z} - \frac{\partial F_z}{\partial r_x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial r_x} - \frac{\partial F_x}{\partial r_y} \end{pmatrix} .$$

A Levi-Chivita szimbólum segítségével kompakt módon is felírhatjuk egy vektortér rotációját:

$$(\mathrm{rot}\mathbf{V})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} F_k$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad i = j \text{ vagy } i = k \text{ vagy } j = k \\ (-1)^p & \text{ahol} \quad p \text{ az } ijk \text{ permutáció inverzióinak a száma} \end{cases}$$

Határozzuk meg egy V skalár tér gardiensének a rotációját:

$$(\mathrm{rot}\nabla V)_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial V}{\partial r_k} = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 V}{\partial r_j \partial r_k} = 0$$

A Young tétel értelmében a második derivált nem változik a j és k indexek felcserélésekor, az ϵ_{ijk} szimbólum azonban előjelet vált, ezért az összegzés eredménye nulla lesz. Vagyis egy skalár tér gradiensének a rotációja eltünik!

Térjünk vissza az előző ábrához! Jelölje W_{BA} azt a munkát, amelyet akkor végzünk, ha a tömegpontot B pontból A pontba visszük. Az 2. számú egyenletnek megfelelően ha tetszőleges pálya mentén visszük a tömegpontot A-ból B-be mindig $-W_{BA}$ munkát kell végeznünk. Ez azt jelenti, hogy a végzett W_{AB} munka csak az A és B pont helyzetétől függ.

$$W_{AB} = V(B) - V(A) .$$

Az így bevezetett mennyiséget potenciális energiának nevezzük. Ha 2. számú feltétel teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer konzervatív. Ekkor az erő a potenciális energia negatív gradiense:

$$\mathbf{F} = -\nabla V .$$