Mozgás centrális erőtérben

1. A centrális erő

Válasszunk egy olyan potenciális energia függvényt, amely csak az origótól való távolságtól függ: $V = V(r)$. A tömegpontra ható erő a potenciális energiája gradiensének minusz egyszerese:

$$F_i = -\frac{\partial V(r)}{\partial r_i} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{r_i} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{r_i}{r} \tag{1}$$

Az előző kifejezésből leolvashatjuk, hogy az erő ebben az esetben mindig az origó felé, vagyis a mozgás centruma felé mutat. Tekintsünk most két tömegpontot, amelyek kölcsönhatnak valamilyen módon egymással. A közöttük fellépő erő nyilvánvalóan a két tömegpontot összekötő egyenessel párhuzamos lesz, vagyis a potenciális energiájuk csak a közöttük lévő távolságtól függ. A rendszer Lagrange függvényét a következőléppen írhatjuk fel:

$$L = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\ . \tag{2}$$

Vezessük be a tömegközépponti és reltív koordinátákat:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\ , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\ . \tag{3}$$

Fejezzük ki az új koordinátákkal az eredeti helyvektorokat:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}\ , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}\ . \tag{4}$$

Határozzuk meg a sebességeket is:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}\ , \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}\ . \tag{5}$$

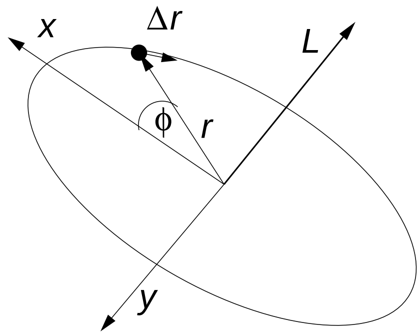
A Lagrange függvény az új változókkal a következő alakú lesz:

$$L = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(r)\ , \tag{6}$$

ahol $M = m_1 + m_2$ és $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, az u.n. redukált tömeg. Az új változókkal felírt Lagrange függvény alakjából leolvashatjuk, hogy a tömegközéppont koordinátája ciklikus változó, vagyis nem szerepel explicit módon a Lagrange függvényben. Ez annyit jelent, hogy a rendszer tömegközéppontja egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. A továbbiakban válasszuk le a tömegközéppont mozgását és vizsgálódásainkat korlátozzuk a relatív koordinátákkal leírható mozgásra:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(r)\ . \tag{7}$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen megmaradó mennyiségeink lesznek: az előző Lagrange függvény invariáns a forgatásokkal és az időbeli eltolásokkla szemben, vagyis a $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ perdület és az $E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + V(r)$ energia megmarad a mozgás során.



A perdület megmaradásából következik, hogy a test síkmozgást végez. Az ábráról leolvasható, hogy a $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$ elmozdulás mindig merőleges az $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ perdületre: $\mathbf{r}\mathbf{L} = 0$. Koordináta x és y tengelyét válasszuk a mozgás síkjába és térjünk át polár koordinátákra:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Fejezzük ki a Lagrange függvényt a polár koordinátákkal:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr\dot{\varphi}^2 - V(r) \ . \tag{8}$$

A φ változótól független a Lagrange függvény, vagyis a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = l \tag{9}$$

mennyiség mozgásállandó lesz. Fejezzük ki a $\dot{\varphi}$-t tartalmazó tagot a Lagrange függvényből l segítségével:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \ . \tag{10}$$

Írjuk fel a rendszer energiáját:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \ . \tag{11}$$

Fejezzük ki a sebességet az energiából:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)} \tag{12}$$

Szeretnénk meghatározni a tömegpont $r(\varphi)$ pályáját. Ehhez fejezzük ki az idő szerinti deriváltját:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{mr^2} \tag{13}$$

és helyettesítsük be az előző egyenletbe

$$\frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{mr^2} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)} \ . \tag{14}$$

$$\frac{\frac{l}{r^2}}{\sqrt{2m\left(E-\left(V(r)+\frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}}dr = d\varphi \tag{15}$$

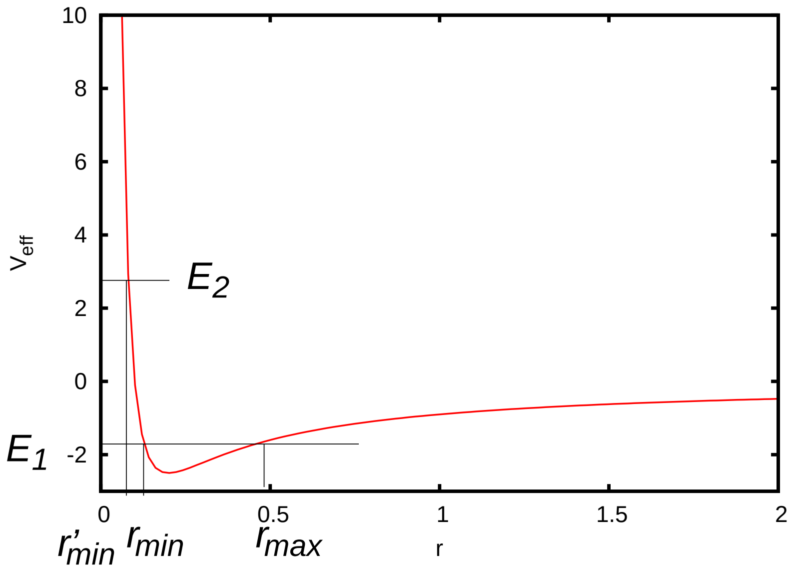
Innen integrálással kaphatjuk meg a $\varphi(r)$ függvényt.

$$\varphi(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E-\left(V(r)+\frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}} \tag{16}$$

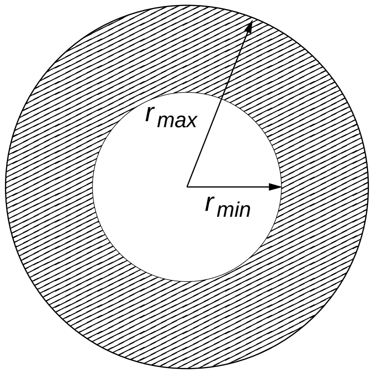
Most térjünk vissza az energia 11 számú képletéhez. Ebből nyilvánvaló, hogy a

$$E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right) \geq 0 \tag{17}$$

kifejezésnek pozitívnak vagy nullának kell lennie. A zárójelben lévő tagot effektív potenciálnak nevezzük. Tekintsük példaként a $V = -\frac{\alpha}{r}$ potenciált és ábrázoljuk az effektív potenciált a távolság függvényében:



Ha az energia, amelyet a kezdeti feltételek hatroznak meg, E_1, akkor az előző feltétel csak akkor teljesül, ha a centrumtól mért távolság r_{min} és r_{max} között változik: $r_{min} \leq r \leq r_{max}$. Ha az energia pozitív, E_2, akkor csak egy alsó korlát létezik a távolságra.



Tehát ha $E < 0$ (E_1), akkor a mozgás az ábrán satírozott területre korlátozódik, míg $E \geq 0$ (E_2) esetében csak egy alsó korlát létezik, amelynél közelebb a centrumhoz nem kerülhet a tömegpont mozgás közben. A 16 számú integrállal kaphatjuk meg a szöget a távolság függvényében. Ha az integrált r_{min} és r_{max} között végezzük el $2n$-szer, akkor visszajutunk a kissebik sugarú körre, nem feltétlenül a kiindulási pontba. Csak akkor kerülünk vissza a kezdő pontba, ha az integrál értéke 2π egészszámú többszöröse lesz:

$$2n \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}} = 2m\pi \, . \tag{18}$$

Ilyen tulajdonságú potenciál a $V = \frac{\alpha}{r}$ és $V = \beta r^2$. A bolygómozgás az első kategóriába esik, a tömegvonzás potenciálja $-1/r$-rel arányos. Ebben az esetben, amint azt a továbbiakban megmutatjuk, a zárt pálya egy elipszis lesz.

2. Bolygómozgás

A bolygómozgás esetén a centrumban a nagy tömegű nap helyezkedik el, amely körül kering a bolygó vonzó potenciálban, amely fordítottan arányos a centrumtól mért távolsággal:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \, . \tag{19}$$

A 16 számú egyenletet integrálása helyett megmutatjuk, hogy ilyen potenciál esetén létezik még egy megmaradó mennyiség, amelyet Runge-Lenz vektornak hívunk:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \, . \tag{20}$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a Runge-Lenz vektor idő szerinti deriváltja eltünik. Először határozzuk meg a $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ vektor idő szerinti deriváltját. A lvezetéshez használjuk fel a Newton egyenletet: $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, ahol az erőt a potenciális energia negatív gradienséből kaphatjuk meg. A mi esetünkben:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\alpha}{r^2} \tag{21}$$

Használjuk ki, hogy a perdület mozgásállandó, tehát $\dot{\mathbf{L}} = 0$.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{L} \tag{22}$$

Használjuk fel a perdület definícióját: $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \times (m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{m\alpha}{r^3}\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}r^2\right) \tag{23}$$

Az előző egyenletből vizsgáljuk meg a $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$ tagot:

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2 = \dot{r}r\ . \tag{24}$$

A fenti azonosságot kihasználva :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = m\alpha\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{r}\frac{\dot{r}}{r^2}\right) = m\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\ , \tag{25}$$

vagyis a Runge-Lenz vektor idő szerintei deriváltja nyilvánvalóan eltünik:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = 0\ . \tag{26}$$

Tehát a bolygómozgás esetén van egy új mozgásállandónk, amely nem nyilvánvaló a Lagrange függvény szimetriájából. Ehhez a mennyiséghez is tartozik egy szimmetria csoport, az $O(4)$, a négydimenziós Euklidészi tér forgatásaiból álló csoport, amellyel szemben a rendszer invariáns. A pálya megszerkesztéséhez használjuk fel az új megmaradó mennyiségünket:

$$\mathbf{r}\mathbf{A} = \mathbf{r}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - m\alpha r = Ar\cos(\varphi) \tag{27}$$

ahol φ a Runge-Lenz vektor és a helyvetor által bezárt szög. Használjuk ki a hármas szorzat permutációs tulajdonságait:

$$\mathbf{r}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})\mathbf{L} = L^2\ , \tag{28}$$

vagyis

$$L^2 - m\alpha r = Ar\cos(\varphi)\ . \tag{29}$$

Az $r(\varphi)$ pályát egyszerűen kifejezhetjük:

$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \frac{A}{m\alpha}\cos(\varphi)}\ . \tag{30}$$

A fenti egyenletben ráismerhetünk egy kúpszelet egyenletére.