# Galilei és Lorentz transzformáció

A mechanikában inerciarendszernek nevezzük azt a vonatkoztatási rendszert, amelyhez viszonyítva egy test mozgására érvényes a tehetetlenség törvénye, vagyis ha egy testet szabadon hagyunk, akkor egyenes vonalú, egyenlletes mozgást végez. Az inerciarendszer maga is nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, és bármely hozzá viszonyított tökéletesen magára hagyott test mozgására érvényes a tehetetlenség törvénye. Az inerciarendszerek a klasszikus mechanika alapján ekvivalensek egymással, azaz semmilyen mechanikai kísérlettel nem lehet a különböző inerciarendszerek mozgásállapotára vonatkozóan információt nyerni.

Tekintsünk két egymáshoz képest $v$ sebességgel mozgó $K$ és $K'$ inerciarendszert. Válasszuk meg úgy a referencia rendszereket úgy, hogy $t = 0$ idő pillanatban az origóik egybe essenek és a tengelyeik párhuzamosak legyenek egymással. Az egyszerűség kedvéért forgassuk be a rendszereket úgy, hogy $v$ legyen párhuzamos a $z$ tengellyel.

A mozgásra merőleges irányokban nem változnak a koordináták a két rendszerben, ezért csak a mozgással párhuzamos $z$ irányra korlátozzuk a vizsgálódásainkat. A $K$ rendszerben a $t$ pillanatban $z$ helyen tartózkodó test ideje és koordinátája a $K'$ rendszerben $t'$ és $z'$. Mivel két inerciarendszerről van szó, ha egy test egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez az egyikben, akkor a másik rendszerben is egyenletes, egyenesvonalú mozgást kell, hogy végezzen. Ebből következik, hogy a $(t, z)$ koordináta párt egy lineáris transzformáció, úgy nevezett *boost*, köti össze a $(t', z')$ koordináta párral:

$$\begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen általános tulajdonságokkal rendelkeznek a boost-ok:

- Ha előbb áttérünk a $K$ rendszerről a $K'$ rendszerre, majd utánna a $K'$ rendszerről a $K''$ rendszerre, akkor találhatunk egy boost-ot, amellyel áttérhetünk rögtön a $K$ rendszerről a $K''$ rendszerre:

$$(K \to K')(K' \to K'') = (K \to K'')$$

- Létezik egység boost, ha a két rendszer közötti sebesség 0.
- Ha a $K'$ rendszer $v$ sebességgel mozog $K$-hoz képest, akkor, nyilánvalóan, a $K$ rendszer $-v$ sebességgel mozog a $K'$-hoz képest, vagyis $(K \to K')$ a $(K' \to K)$ boost inverze.

Megállapíthatjuk, hogy a transzformációk egy folytonos csoportot alkotnak, amelynek paramétere a $v$ sebesség. Milyen megszorításokat tehetünk a 1 számú transzformációban szereplő függvényekre, ha kihasználjuk a csoport tulajdonságokat? Először íruk fel mindkét rendszer origójának a mozgását:

$K$ origója

$$\begin{pmatrix} t' \\ -vt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t, \quad -vt' = \beta t \\ -v\gamma &= \beta \end{aligned}$$

$K'$ origója

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \beta t + \alpha v t \\ -v\alpha &= \beta \end{aligned}$$

$$\alpha = \gamma$$

Az origók mozgásából kapott feltételek után csak két paraméter maradt a 1 számú transzformációban:

$$\begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -v\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

A $(K' \to K)$ inverz transzformáció két módon is előállhat: egyrészt nyilvánvalóan megkaphatjuk a 2 egyenletben szereplő mátrix inverzeként, másrészt oly módon is, ha a $\gamma(v)$, $\delta(v)$ paramétereket a $\gamma(-v)$, $\delta(-v)$ paraméterekkel hlyettesítjük a 2 transzformációban. Tehát:

$$\frac{1}{\gamma^2(v) + v\delta(v)\gamma(v)} \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\delta(v) \\ v\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(-v) & \delta(-v) \\ v\gamma(-v) & \gamma(-v) \end{pmatrix} \tag{3}$$

A 3. egyenletből könnyen leolvashatjuk, hogy a transzformáció determinánsa egy kell, hogy legyen (unitér transzformáció)

$$\frac{1}{\gamma^2 + v\delta\gamma} = 1 \ ,$$

valamint $\gamma(v) = \gamma(-v)$ és $\delta(v) = -\delta(-v)$, vagyis $\gamma$ páros, $\delta$ pedig páratlan függvénye a két rendszer közötti sebességnek.

Két boost-ot egymás után elvégezve ugyancsak egy boost-ot kell kapnunk, amelynek a szerkezete meg kell, hogy egyezzen a 2 számú egyenletben szereplő transzformációval.

$$\begin{pmatrix} \gamma(v') & \delta(v') \\ -v'\gamma(v') & \gamma(v') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(v) & \delta(v) \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v+v') & \delta(v+v') \\ -(v+v')\gamma(v+v') & \gamma(v+v') \end{pmatrix} \tag{4}$$

vagyis,

$$\begin{pmatrix} \gamma(v')\gamma(v) - v\delta(v')\gamma(v) & \gamma(v')\delta(v) + \delta(v')\gamma(v) \\ -(v'+v)\gamma(v')\gamma(v) & -v'\gamma(v')\delta(v) + \gamma(v')\gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v+v') & \delta(v+v') \\ -(v+v')\gamma(v+v') & \gamma(v+v') \end{pmatrix} \tag{5}$$

A szorzat mátrixban a diagonálisoknak meg kell egyezniük:

$$\gamma(v')\gamma(v) - v\delta(v')\gamma(v) = -v'\gamma(v')\delta(v) + \gamma(v')\gamma(v) \ , \tag{6}$$

amelyből következik, hogy

$$\frac{\delta(v)}{v\gamma(v)} = \frac{\delta(v')}{v'\gamma(v')}. \tag{7}$$

Tudjuk, hogy a transzformáció determinánsa egységnyi, $\gamma^2 + v\delta\gamma = 1$, így $\gamma$ nem vehet fel nulla értéket. Az előző egyenletnek tetszőleges $v$ sebességre teljesülnie kell, vagyis a $\frac{\delta}{v\gamma}$ mennyiségnek egy, a transzformáció tipusától függő állandónak kell lennie:

$$\frac{\delta}{v\gamma} = \kappa \ . \tag{8}$$

Fejezzük ki a transzformáció determinánsát $\kappa$ segítségével:

$$1 = \gamma^2 + v\delta\gamma = \gamma^2(1 + \kappa v^2) \ , \tag{9}$$

amely egyenletből egyszerűen kifejezhetjük $\gamma$-t:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa v^2}}. \tag{10}$$

Ha a $v$ sebességet nullának választjuk, vagyis a $K'$ rendszer nyugszik a $K$ rendszerhez képest, akkor a 2. egyenletben egység mátrixot kell kapnunk. Ennek alapján kizárhatjuk $\gamma$ megoldásából a negatív értékeket.

Tehát egy általános boost transzformációt a következő transzformációval írhatunk le:

$$\begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa v^2}} \begin{pmatrix} 1 & \kappa v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \tag{11}$$

Egymástól eltérő transzformációkat $\kappa$ különböző megválasztásával kaphatunk. Természetesen úgy kell megválasztanunk, hogy fizikailag releváns transzformációt – ne ostobaságot – kapjunk. Tekintsük először a $\kappa = 0$ esetet. Ekkor $t' = t$ és $z' = z - vt$ adódik a 11 egyenletből, vagyis visszakaptuk a Galilei transzformációt, amelyben minden rendszerben egyformán telik az idő.

# Lorentz transzformáció

Albert Michelson és Edward Morley 1887-ben végzett kísérletükben úgy találták, hogy a fény terjedési sebessége minden inerciarendszerben ugyanaz. Ezt a megfigyelést azóta számos más kísérlet is megerősítette. Ezek szerint a fény a $K$ és a $K'$ rendszerben $ct$ és $ct'$ utat tesz meg, ha feltételeztük, hogy kezdetben mindkét referencia rendszer origója egy pontban volt.

$$\begin{pmatrix} t' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa v^2}} \begin{pmatrix} 1 & \kappa v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ ct \end{pmatrix} \tag{12}$$

vagyis

$$\sqrt{1+\kappa v^2}t' = t + cv\kappa t \tag{13}$$

$$\sqrt{1+\kappa v^2}ct' = -vt + ct \tag{14}$$

ahonnan $\kappa = 1/c^2$ adódik. Behellyettesítve $\kappa$-át a 11 transzformációba a Lorentz transzformáció kifejezését nyerjük:

$$\begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \tag{15}$$