1. **Feladat**
Egy végtelen hosszú, koszinusz hullám alakú dróton surlódás nélkül csúszik egy m tömegű test. A drót egyenlete a következő: $y = \frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$.

a.) Írjuk fel a test $K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ kinetikus energiáját!

b.) Adjuk meg a test Lagrange függvényét![1]

c.) Mi lesz a test általánosított impulzusa?

d.) Írjuk fel a test mozgás egyenletét (Euler-Lagrange egyenlet)! [2]

e.) Mekkora lehet a test energiája, ha azt akarjuk, hogy a mozgása véges tartományra korlátozódjon?

Megoldás:

a.) $\frac{1}{2}m\left(1+\sin^2(\alpha x)\right)\dot{x}^2$

b.) $\frac{1}{2}m\left(1+\sin^2(\alpha x)\right)\dot{x}^2 - mg\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$

c.) $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\left(1+\sin^2(\alpha x)\right)\dot{x}$

d.)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{2}m\alpha\sin(2\alpha x)\dot{x}^2 + mg\sin(\alpha x), \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\left(1+\sin^2(\alpha x)\right)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\left(1+\sin^2(\alpha x)\right)\ddot{x} + m\alpha\sin(2\alpha x)\dot{x}^2, \quad mg\sin(\alpha x) - \frac{1}{2}m\alpha\sin(2\alpha x)\dot{x}^2 = m\left(1+\sin^2(\alpha x)\right)\ddot{x}$$

2. **Feladat**
Egy m tömegű gyöngy egy parabola alakú dróton csúszhat surlódásmentesen, ahogy azt az ábra is mutatja. A parabola egyenlete: $y = \alpha x^2$.

Megoldás:
Lásd az előbb:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(1 + 4\alpha^2 x^2\right)\dot{x}^2$$

stb.

3. **Feladat**
Egy m tömegű pont a $V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ centrális potenciálban mozog.

a.) Hány dimenziós mozgásunk lesz?

b.) Milyen megmaradó mennyiségeink lesznek?

c.) Milyen J impulzus momentum nagyság esetén lesz a Lagrange függvény független r-től?

Megoldás:

a.) Két dimenziós mozgás lesz, mivel a Lagrnage függvény invariáns a forgatásokkal szemben, így a perdület vektor mozgásállandó lesz.

b.) Energia, perdület

c.) A perdület: $l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$. A rendszer energiája a perdülettel kifejezve:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2}\,.$$

Ha $\frac{l^2}{2m} = \alpha$, akkor a mozgásegyenletben nem fog szerepelni a potenciális energia: $\ddot{r} = 0$.

[1] $L = K - V$
[2] $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

4. **Feladat**
   Tekintsünk egy 2D izotróp harmonikus oszcillátort:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right) \ ,$$

ahol r_1, r_2 a két Descartes koordinátája a pontnak, k pedig a rugóállandó. Bizonyítsuk be, hogy a

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(kr_ir_j + \frac{p_ip_j}{m}\right)$$

mátrix elemei mozgásállandók! Deriváljuk le A_{ij}-t idő szerint és használjuk ki a mozgás egyenleteket. Nyilvánvalóan a mátrix nyoma is megmaradó mennyiség lesz. Milyen fizikai mennyiséget kapcsolhatunk hozzá?

Megoldás:
Használjuk ki, hogy

$$\dot{p}_1 = m\ddot{r}_1 = F_1 = -\frac{\partial V}{\partial r_1} = -kr_1, \qquad \dot{p}_2 = m\ddot{r}_2 = F_2 = -\frac{\partial V}{\partial r_2} = -kr_2$$

A fenti mozgásegyenleteket kihasználva egyzserűen adódik, hogy $\frac{dA_{ij}}{dt} = 0$.

5. **Feladat**
   Egy folyadékban lassan mozgó testre a sebességével arányos fékező erő hat:

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} \ .$$

Mutassuk meg, hogy a fenti mozgásegyenlet a

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

Lagrange függvényből származtatható!

6. **Feladat**
   Adjuk meg egy α hajlásszögű síkon súrlódásmentesen csúszó m tömegű test Lagrange függvényét! (Vigyázat: két dimenziós feladat!)

7. **Feladat**
   Egy súlytalan, l hosszúságú rúd végén m tömegű test leng (3D-ben).

   a.) Írjuk fel a Lagrange függvényét polár koordinátákban!

   b.) Milyen megmaradó mennyiségeink lesznek?

   c.) Adjuk meg az Euler–Lagrange egyenleteket!

   d.) Milyen kezdeti feltételekkel fog a rendszer ingaként viselkedni?

8. **Feladat**
   Az előző feladat ingája esetén mutassuk meg, hogy a perdület
   $J_z = xp_y - yp_x$ komponense, ahol $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ a tömegpont impulzusa, megegyezik a ciklikus koordinátából adódó megmaradó mennyiséggel.

Segítség:
A Lagrange függvény:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi} + mgl\cos(\theta)$$

$$J_z = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2$$

$$x = l\sin(\theta)\cos(\varphi), \qquad y = l\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$v_x = l\dot{\theta}\cos(\theta)\cos(\varphi) - l\dot{\varphi}\sin(\theta)\sin(\varphi), \qquad v_y = l\dot{\theta}\cos(\theta)\cos(\varphi) + l\dot{\varphi}\sin(\theta)\cos(\varphi)$$

$$\begin{aligned} J_z &= xp_y - yp_x \\ &= ml\sin(\theta)\cos(\varphi)\left(l\dot{\theta}\cos(\theta)\cos(\varphi) + l\dot{\varphi}\sin(\theta)\cos(\varphi)\right) \\ &- ml\sin(\theta)\sin(\varphi\left(l\dot{\theta}\cos(\theta)\cos(\varphi) - l\dot{\varphi}\sin(\theta)\sin(\varphi)\right) \\ &= ml^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

9. **Feladat**
Egy m tömegű, pontszerű test mozog a következő centrális potenciálban:

$$V(r) = \frac{k}{2}r^2 \, .$$

a.) Milyen mozgásállandóink lesznek?

b.) Hány dimenziós lesz a mozgásunk?

c.) A perdület megmaradását kihasználva fejezze ki a rendszer energiáját!

d.) Adja meg a tömegpont centrumtól mért legkisebb és legnagyobb távolságát a mozgás során!

Segítség:

a.)

idő eltolás	energia	$E =$
forgatás	perdület	$\mathbf{r} \times \mathbf{p}$

b.) két dimenziós

c.)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

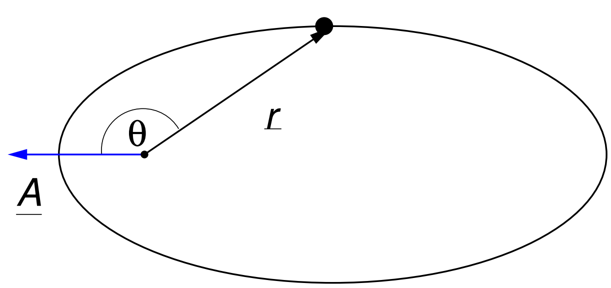
d.)

$$E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 = 0$$

10. **Feladat**
A Kepler probléma (bolygó mozgás) esetében bebizonyítható, hogy a

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{J} - m\gamma\frac{\mathbf{r}}{r}$$

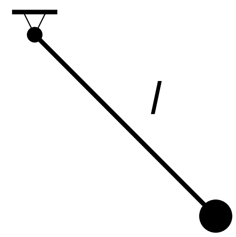
Runge-Lentz vektor állandó a mozgás során. (γ a gravitációs állandó szorozva a nap tömegével). Tudjuk, hogy a $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ perdület is megmaradó mennyiség. A két mozgásállandó segítségével vezessük le a $r = r(\vartheta)$ pálya egyenletet.



Segítség:

$$\mathbf{rA} = rA\cos(\theta) = \mathbf{r}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - m\gamma r = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})\mathbf{L} - m\gamma r$$
$$rA\cos(\theta) = L^2 - m\gamma r$$

11. **Feladat**
Irjuk fel egy súlytalan, l hosszúságú rúd végén mozgó m tömegű test Lagrange függvényét, ha a rúd másik vége egy minden irányba mozgó csuklóhöz rögzített! Van-e ciklikus koordinátánk és ha van, adjuk meg a hozzá tartozó megmaradó általánosított impulzust!



Segítség:
Lásd a 7. feladatot

12. **Feladat**
Egy rugó végén surlódásmentesen mozgó tömegpont Lagrange függvénye a következő alakú:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \ ,$$

ahol k a rugó állandó. A mozgásegyenlet a következő lesz:

$$m\ddot{x} = -kx \ .$$

Ha fellép egy sebességgel arányos surlódási erő akkor a mozgásegyenletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{1}$$

Mi lesz a Lagrange függvény ebben az esetben? Keressük a Lagrange függvényt a következő alakban:

$$L = f(t)\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2\right) \ ,$$

és hasonlítsuk össze az ebből az alakból származtatható mozgás egyenletet (Euler-Lagrange egyenlet) az 1 számú mozgásegyenlettel! Az összehasonlításból $f(t)$ meghatározható.

13. **Feladat**
Egy m tömegű test egy r_0 nyugalmi hosszúságú rugó végén lifeg valahol az űrben. A Lagrange függvénye

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{k}{2}(r - r_0)^2 \ .$$

a.) Milyen megmaradó mennyiségeink lesznek?

b.) Hány dimenziós mozgást fog végezni a test?

c.) Becsüljük meg a tömegpont centrumtól mért legkisebb és legnagyobb távolságát a következő paraméterek esetén:

$$\frac{l^2}{m} = 2\frac{m^4kg}{s^2} \ , \ \ k = 2N/m \ , \ \ r_0 = 1mq \ , \ \ E = 10J$$

(Gondoljunk arra, hogy kis és nagy távolságokon melyik tag uralja az energiát.)

Segítség:

a.) Energia, perdület

b.) Perdület mozgásállandó, 2D mozgás

c.)

$$E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 = 0$$

Kis távolságok: $(r - r_0)^2$ elhanyagolható
Nagy távolságok: $\frac{l^2}{2mr^2}$ elhanyagolható

14. **Feladat**
A bolygó mozgás esetében az energiát a következőképpen adhatjuk meg:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r} \,,$$

ahol L a perdület nagysága, E az energia, γ pedig egy állandó.

a.) Az energia milyen értékeinél lesz a mozgás korlátos? 10 pont

b.) Adjuk meg a centrumtól mért legkisebb és legnagyobb távolságot az energia függvényében! 10 pont

c.) A második kozmikus sebességnek azt a sebességet hívjuk, amelyet meghaladva egy eszköz térbelileg nem korlátos pályára (parabóla, hiperbóla) kerül. Becsüljük meg a második kozmikus sebességet a föld esetén! 10 pont
Segítség: A föld felszinén a potenciális energia gradiense az erő minusz egyszerese, vagyis $\frac{\gamma}{R^2} = mg$, ahol $g = 10\,m/s^2$, $R = 6.378 \times 10^6\,m$. A Föld forgásából adódó perdületet elhanyagolhatjuk.

d.) Ha a potenciális energia alakja $V = \frac{\gamma}{r}$ alakú, akkor bebizonyítható, hogy az u.n. Runge-Lentz vektor $\mathbf{P} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \gamma m \frac{\mathbf{r}}{r}$ is mozgásállandó lesz. A Runge-Lentz vektor segítségével vezessünk le összefüggést az r és φ polárkoordináták között! 10 pont
Segítség: Jobb híján megpróbálkozhatunk az $\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}$ skalárszorzat felírásával! Használjuk ki a vegyes szorzat tulajdonságait!

15. **Feladat**
A Fermat elvet felhasználva a fény pályáját a következő Lagrange függvénnyel adhatjuk meg:

$$L = n(\mathbf{r})\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2} \,,$$

ahol $n(\mathbf{r})$ a törésmutató. Mutassuk meg, hogy az időeltolással szembeni invarianciából következő $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L$ mennyiség azonosan nulla!

16. **Feladat**
Legyen egy kétdimenziós optikai rendszerünk, amelyben a törésmutató csak az x tengely mentén változik. A Lagrange függvény ekkor:

$$L = n(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,,$$

ahol az $y(x)$ függvény adja meg a fény pályáját, $n(x)$ pedig a törésmutató.

a.) Mi lesz az általános koordinátánk?

b.) Van-e ciklikus koordinátánk és ha van mi lesz a hozzá tartozó megmaradó mennyiség?

c.) Fejezzük ki a $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} - L$ Hamilton függvényt, ahol $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$! Megmaradó mennyiség lesz-e a Hamilton függvény?

17. **Feladat**

Egy részecske centrális erőtérben mozog. A potenciális energiáját $V(r) = -\frac{\gamma}{r^4}$ alakban adhatjuk meg. Az energiáját a következő kifejezés adja meg:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r^4} ,$$

ahol L a perdület nagysága, amely mozgásállandó.

a.) Ábrázoljuk a $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r^4}$ effektív potenciált az r távolság függvényében!

b.) Megvalósulhat-e olyan mozgás, amely során V_{eff} nagyobb mint az E energia?

c.) Milyen kezdeti feltételek (E, L, $r(0)$) esetén távolodhat el végtelen messzire a tömegpont a vonzó centrumtól?