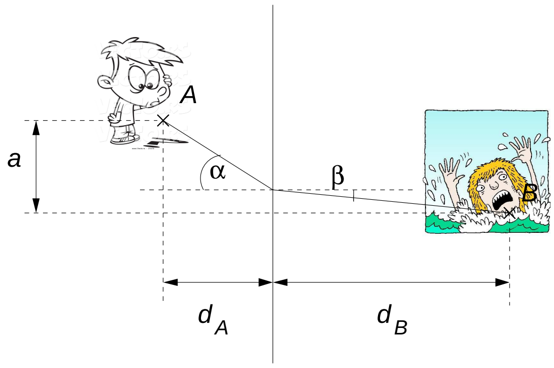
1. Az előző előadás anyaga

Egy fiú áll az A pontban és azt látja, hogy a barátnője fuldoklik a B pontban egy tóban. Milyen plyán kell a fiúnak mozognia, hogy a leggyorsabban a barátnőjéhez érjen, ha a parton v_1 a vízben pedig v_2 sebességgel tud mozogni? Határozzuk meg, hogy mennyi időre van szüksége, hogy a barátnőjét elérje:

$$t = \frac{d_A}{v_1 \cos(\alpha)} + \frac{d_B}{v_2 \cos(\beta)} \tag{1}$$



Az ábráról leolvashatóan a következő feltételnek is teljesülnie kell:

$$d_A \tan(\alpha) + d_B \tan(\beta) = a\,. \tag{2}$$

Az 1. számú egyenlet minimalizálásakor ezt feltételt is figyelembe kell vennünk, ezért a következő függvényt minimalizáljuk:

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= \frac{d_A}{v_1 \cos(\alpha)} + \frac{d_B}{v_2 \cos(\beta)} \\ &+ \lambda\left(d_A \tan(\alpha) + d_B \tan(\beta) - a\right)\,, \end{aligned}$$

ahol λ az u.n. Lagrange multiplikátor. Ha a 2 számú feltétel teljesül, akkor nyilvánvánvalóan a Lagrange multiplikátorral beszorzott tag nem befojásolja a minimum heléyét. Minimum esetén

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0\,, \text{ vagyis } \frac{d_A \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \lambda \frac{d_A}{\cos^2(\alpha)} = 0\,, \quad \frac{d_B \sin(\beta)}{\cos^2(\beta)} + \lambda \frac{d_B}{\cos^2(\beta)} = 0\,.$$

A két egyenletből a következő összefüggést kaphatjuk:

$$\frac{1}{v_1}\sin(\alpha) = \frac{1}{v_2}\sin(\beta)\,.$$

Most a fiú szerepét töltse be a fény. Egy adott közegben a fény tarjedési sebességét a törésmutató határozza meg: $v_1 = c/n_1$. Ha ezt a kifejezést az előző egyenletbe helyettesítjük, akkor a középiskolából ismerős fénytörésre vonatkozó Snellius-Descartes törvényt kapjuk:

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)\,.$$

A fénytörés törvényét egy függvény (funkcionál) minimalizálásával kaptuk meg. Kicsit bonyolítsuk el a problémát. Legyen a törésmutató a hely függvénye az (x,y) síkban: $n = n(x,y)$. Ha a fénysugár útját az $y = y(x)$ függvény írja le, akkor az x helyhez tartozó ivelem hossza az $\Delta l = \sqrt{1+y'^2}\Delta x$ alakban adható meg, ahol y' az $y(x)$ függvény hely szerinti deriváltja. A fénynek

$$\frac{\Delta l}{v} = \frac{n(x,y)}{c}\sqrt{1+y'^2}\Delta x$$

időre van szüksége, hogy megtegye ezt a kicsiny távolságot. A teljes időt egy integrállal tudjuk megadni:

$$t = \frac{1}{c}\int_{x_A}^{x_B} n(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx = \frac{1}{c}\int_{x_A}^{x_B} L(x,y,y')dx\,. \tag{3}$$

Keressük azt a pályát, amely összeköti az (x_A, y_A), (x_B, y_B) pontokat és amelyen mozogva a fény a legrövidebb idő alatt ér A-ból B-be, vagyis minimalizálja a fenti integrált. A mi esetünkben

$$L(x,y,y') = n(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,.$$

Tételezzük fel, hogy az $y(x)$ pályán mozogva a legrövidebb idő alatt jut el a fény **A**-ból **B**-be. Ha ehhez a pályához egy tetszőleges kicsiny δy függvényt hozzáadunk, akkor a 3 számú integrál első rendű megváltozása el kell, hogy tünjön:

$$\delta S = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx - \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, y')dx = 0\,, \tag{4}$$

analóg módon azzal az esettel, amikor egy függvény minimumában az első rendű megváltozása (első deriváltja) nulla lesz. Az előző integrálban $\delta y'$ a $\delta y(x)$ függvény x szerinti első deriváltja.Fejezzük ki δS-et L parciális deriváltjai segítségével:

$$\delta S = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial L}{\partial y}\delta y dx + \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' dx\,. \tag{5}$$

Integráljuk ki a második tagot parciálisan:

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' dx = \left.\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\right|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y dx \tag{6}$$

Csak olyan pályákat keresünk, amelyek az **A** pontból indulnak és a **B** pontba érkeznek meg, ebből következik, hogy $\delta(x_A) = \delta(x_B) = 0$, vagyis az első tag a parciális integrálban eltünik. Vonjuk össze δS két tagját egy integrálba:

$$\delta S = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y dx = 0\,. \tag{7}$$

A fenti egyenlőségnek tetszőleges δy függvény esetén teljesülnie kell! Tekintsünk pl. egy olyan függvényt, amely mindenütt nagyobb mint egy $\varepsilon > 0$ szám. Kézenfekvő, hogy az előző integrál csak akkor tünhet el, ha a zárójelben lévő tag nulla lesz:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0\,. \tag{8}$$

Ezt az egyenletet hívjuk Euler-Lagrange egyenletnek! Abból a feltételből kiindulva, hogy a fénynek a legrövidebb időn belül kell eljutnia az egyik rögzített pontból egy másik rögzített pontba levezettünk egy differenciál egyenletet, amely meghatározza a pályáját.

Nézzük meg a következő esetet. Válasszuk a törésmutatót $n(x) = x/x_A$-nak, feltéve hogy $x \geq x_A$. Ebben az esetben L nem függ y-tól csak y'-tól, azt mondjuk, hogy y ciklikus változója az L függvénynek. Nyilván

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0\;, \quad \text{és} \;\; \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{n(x)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{áll.}$$

Ha $y'(x_A) = \tan(\alpha)$-t választjuk, akkor egyszerűen beláthatjuk, hogy az állandó $\sin(\alpha)$ lesz, ahol α az A pontból induló sugár x tengellyel bezárt szöge lesz:

$$\frac{x/x_A y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sin(\alpha)$$

Fejezzük ki y'-t:

$$y' = \frac{x_A}{\sqrt{x^2 - x_A^2\sin^2(\alpha)}}$$

és

$$y(x') = \int_{x_A}^{x'} \frac{x_A}{\sqrt{x^2 - x_A^2\sin^2(\alpha)}}dx + C$$

Az $x = x_A\sin(\alpha)ch(z)$ választással az integrál

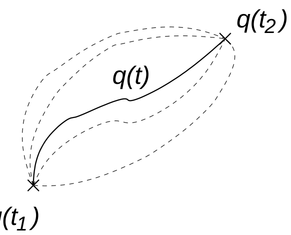
$$y = x_A\, arch\left(\frac{x}{x_A\sin(\alpha)}\right) + C$$

ahol $arch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

2. Legkisseb hatás elve

A fizika törvényei hierarchikus szerveződésűek. Egyes törvények más, magasabb rendű törvények következményei, míg a hierarchia legtetején állnak az axiómák, azok az elvek, amelyeket már nem származtathatunk felsőbb elvekből. A mechanika egyik alapvető axiómája a legkisebb hatás elve. A legkisebb hatás elve szerint a tömegpontok olyan pályán mozognak, amelyek a hatás funkcionált minimalizálják. Egy részecske állapotát az $\mathbf{r}$ helyvektorával és $\mathbf{v}$ sebességével jellemezhetünk. Ezek ismeretében meg tudjuk határozni a részecske helyzetét egy infinitezimálisan kicsiny Δt idővel később. A hatást is e két mennyiség funkcionáljaként kell keresnünk:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) dt \ , \tag{9}$$



ahol $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ a tömegpont valamilyen általánosított koordinátája, pl. Descartes vagy polár koordinátája, és annak idő szerinti deriváltja. A t_1 kezdő és t_2 végső pillanatban a pálya általánosított koordinátáját $\mathbf{q}_1$ és $\mathbf{q}_2$ pontban rögzítjük. Az L függvényt a rendszer Lagrange függvényének nevezzük. Tehát azt a $\mathbf{q}(t)$ pályát keressük, amely a $\mathbf{q}_1$ pontból indul, a $\mathbf{q}_2$ pontba érkezik és minimalizálja az 9 számú egyenletben szereplő hatást. Ha azt a $\mathbf{q}(t)$ pályát, amely minimalizálja a hatást egy kicsiny $\delta\mathbf{q}(t)$ függvénnyel megváltoztatjuk a hatás δS elsőrendű megváltozásának el kell tünnie:

$$\delta S = S[\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)] - S[\mathbf{q}(t)] = 0 \ . \tag{10}$$

Nyilvánvalóan $\frac{d}{dt}\delta\mathbf{q} = \delta\dot{\mathbf{q}}$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) dt \tag{11}$$

Az egyenlet első tagját fejtsük sorba:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}}\right) dt \tag{12}$$

A második tagot integráljuk parciálisan:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}}dt = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}dt \tag{13}$$

Miután a pálya kezdő és végpontja rögzített, $\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = 0$, így az első tag a parciális integrálból eltünik, vagyis

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}}dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}dt \ . \tag{14}$$

A hatás elsőrendű megváltozását tehát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \delta\mathbf{q}dt = 0 \tag{15}$$

A fenti egyenletnek tetszőleges $\delta\mathbf{q}$ esetén teljesülnie kell, amely feltétel csak úgy valósulhat meg, ha a zárójelben lévő kifejezés azonosan nulla:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{16}$$

Több szabadsági fok esetén az egyes szabadsági fokokat leíró általános koordináták és deriváltjaik szerint kell variálnunk a hatást:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = 0 \tag{17}$$

Az előző egyenletek határozzák meg a tümegpont pályáját, végső soron a részecske mozgását, dinamikáját. Ezeket az egyenleteket hívjuk **Euler-Lagrange** egyenleteknek. Vizsgáljuk meg, hogy mennyire egyértelműek a fenti egyenletek. Különbözzön két Lagrange függvény csak egy tetszőleges függvény teljes időderiváltjában:

$$L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) \tag{18}$$

A hatás integrálja a következőképpen alakul:

$$S' = S + f\left(\mathbf{q}(t_2), t_2\right) - f\left(\mathbf{q}(t_1), t_1\right) \tag{19}$$

Ismét kihasználhatjuk, hogy $\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = 0$, így nyilvánvalóan $\delta S' = \delta S$. Ha a $\mathbf{q}(t)$ pálya minimalizálja az S hatást, akkor minimális lesz a hatás S' esetén is. Vagyis a Lagrange függvény csak egy tetszőleges függvény teljes időderiváltja erejéig meghatározott.

Nézzük meg, hogy hogyan kell megválasztanunk Lagrange függvényt, hogy a 17. számú Euler-Lagrange egyenletek megegyezzenek a $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ Newton egyenlettel. Ha létezik potenciális energia, akkor az erő a potenciális energia negatív gradiense:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \, .$$

Általánosított koordinátának válasszuk a Descartes koordinátákat úgy, hogy legyen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} \text{ és } \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \, .$$

Ebben az esetben az Euler-Lagrange egyenletek ekvivalensek a Newton egyenlettel, tehát

$$L = \, ,$$

több tömegpont esetén

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \ldots \mathbf{r}_N) \, .$$

3. Megmaradó mennyiségek

Ha a 17 számú Euler-Lagrange egyenletekben

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = 0$$

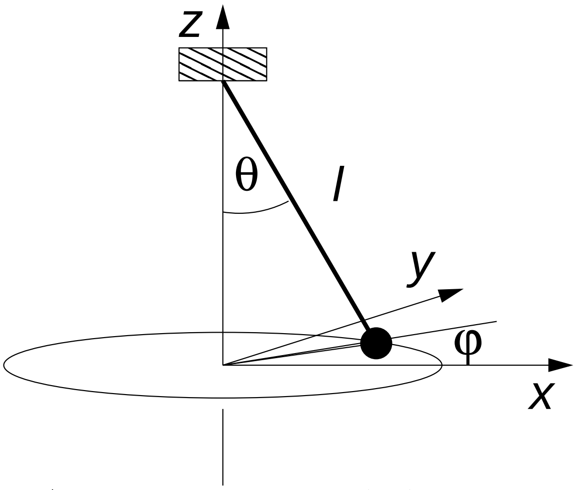
akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{q}_i$ általánosított koordináta ciklikus koordináta. Ebben z esetben a hozzátartozó

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}$$

általánosított impulzus időben állandó lesz.

Tekintsük a következő példát. Legyen egy súlytlan rúd végén egy m tömegű pontszerű test. A rendszer Lgrange függvényét következőképpen adhatjuk meg:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$$



$$\begin{aligned} x &= l\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= l\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= -l\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\cos(\varphi) - l\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \dot{y} &= l\dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\sin(\varphi) + l\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \dot{z} &= l\dot{\vartheta}\sin(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = l^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta) + mgl\cos(\vartheta) \tag{20}$$

Az inga 20. Lagrange egyenletében nem szerepel a φ változó, tehát a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi} = J \tag{21}$$

mozgásállandó lesz. Értékét a kezdeti feltételek határozzák meg, amely a mozgás során állandó marad. A ϑ-ra vonatkozó Euler-Lagrange egyenlet a következő lesz:

$$ml^2\ddot{\vartheta} = mgl\sin(\vartheta) + ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\ ,$$

amelyből a 21. számú egyenlet mozgásállndója segítségével eltüntethetjük a $\dot{\varphi}$ változót:

$$ml^2\ddot{\vartheta} = mgl\sin(\vartheta) + \frac{J^2}{ml^2\sin^2(\vartheta)} \tag{22}$$

A fenti közönséges differenciálegyenlete megoldva leírhatjuk az inga mozgását.