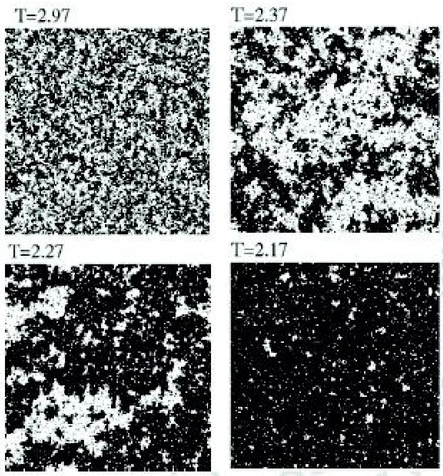
Folyadékok és gázok mechanikája (hidrodinamika)

A hétköznapi életben mindenki meg tudja különböztetni a halmazállapotokat. Így beszélünk szilárd, folyékony és légnemű anyagokról. Az eddigi mechanikai vizsgálódásunk már megmutatta, hogy a „szilárd" halmazállapoton belül dinamikai szempontból meg kell hogy különböztessük egymástól a merev testeket és a „szilárd" de rugalmas közegeket (kristályos anyagokat).

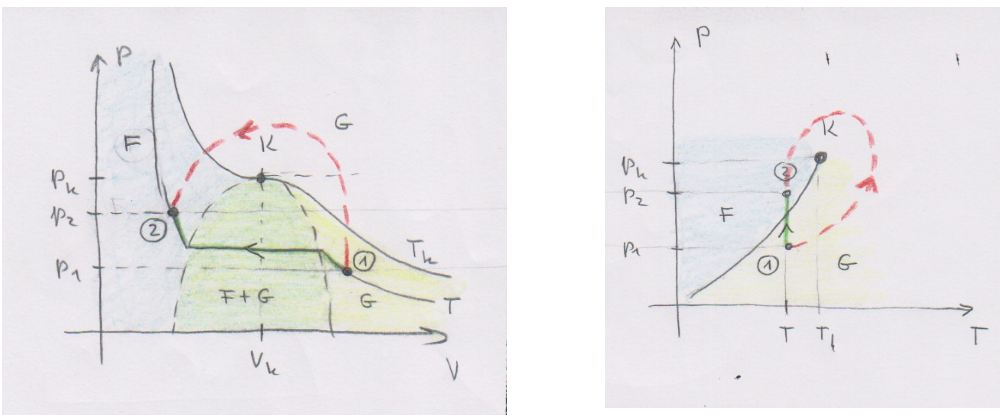
Most azt fogjuk megmutatni, hogy a folyékony és a légnemű anyagok (folyadékok és gázok) mind termodinamikailag, mind pedig mechanikailag nagy hasonlóságot mutatnak. Ennek következtében sokszor nem is indokolt közöttük különbséget tenni. Ezért aztán Hidrodinamikán (pl. ideális esetben) folyadékok és gázok kontinuum mechanikáját értjük.

MEGJEGYZÉS: A gyökerek a termodinamikáig nyúlnak vissza. Az ottani tanulmányainkban foglalkoztunk a fázisátalakulásokkal. Részletesen elemeztük a fázisátalakulás (p,T) diagrammját a „K" kritikus pont környékén. Láttuk, hogy a gázállapotból a folyadékállapotba (az ábrán az „1" pontból a „2" pontba)
Kétféle úton juthatunk el. Az egyik során pl egy izoterm állapotváltozással növeljük a nyomást. Ekkor a (p,V) diagrammon a „középiskolás fokon" is jól ismert fázisátalakulási folyamatot figyelhetjük meg. Ennek során a folyadék és a gáz egyszerre van jelen a tartályban. A két fázist a folyadék felülete („meniszkusz") választja el egymástól. A folyamat során a folyadék mennyisége nő, a gázé (helyesebben a gőzé) csökken, Végül a tartályt csak a folyadék tölti ki. Minden időpontban pontosan meg tudtuk különböztetni egymástól a folyadékot és a gőzt.

Nem ez a helyzet, ha a másik utat követjük. Ekkor soha nem tapasztaljuk azt, hogy folyadék és gőz egyszerre lenne jelen (nincsen „meniszkusz"). A tartályt a folyamat során állandóan egy homogén anyag tölti ki, amelynek sűrűsége folyamatosan változik. A folyamat végén az egész tartályt folyadék fogja kitölteni. Azt azonban nem tudjuk megmondani, hogy kezdetben nyilvánvalóan jelen lévő gőz mikortól nevezhető folyadéknak (természetesen a folyamat végén biztosan). Ezt „folytonos fázisátalakulásnak" (vagy másodrendű fázisátalakulásnak) nevezzük.



1ábra



2. ábra

A **folyadék (gáz)** olyan homogén és izotróp kontinuum közeg, amelyben nyugalmi állapotban nem ébred nyírófeszültség. Ez az oka annak, hogy pl. statikus egyensúly esetén felveszik a mindenkori tartály alakját, teljesen kitöltve azt.

Mint tudjuk a nyíró feszültségek jelenlété egyfajta „belső súrlódásként" szoktuk értelmezni. Hiszen az egymással érintkező anyagrétegeknek az egymáshoz képesti elcsúsztatásához erőt kell kifejtenünk (lásd a „kártyacsomag" analógiát). Tehát a folyadékokban (gázokban) statikus belső súrlódás (statikus nyíró feszültség) nem lép fel. Reális folyadékoknál közismert a „viszkozitás" jelensége (pl. a méz). Nyugalmi állapotban itt sincsen belső súrlódás, de mozgás (áramlás) során van. Reális folyadékok tehát dinamikus viszkozitással rendelkeznek.

Ideálisnak nevezzük azt a folyadékot (gázt) amelyben a mozgás során sem lép fel belső súrlódás (dinamikai viszkozitásuk nincsen).

Először a legegyszerűbbel, az ideális folyadékok mozgás egyenletével fogunk megismerkedni, majd rátérünk a reális folyadékok alapegyenletének a vázlatos ismertetésére.

Az „áramlástan" a (gépész)mérnöki alaptudományok egyik legfontosabb és legnehezebb területe. A fizikus számára az aktualitását a plazmadinamika adja, amely a fúziós energiatermelés alapproblémája.

Mit azt az előzőekben láttuk, a kontinuum mechanika alapegyenletei a következők voltak:

A Newton pontmechanikai mozgástörvény alapján kaptuk a mozgásegyenlet, amelyik a Lagrange-féle (pontkövető) szemlélet miatt, a szubsztanciális időderiváltat tartalmazza.

$$\rho d_t v_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i \qquad (i=1,2,3) \qquad \text{(LME)}$$

A tömegmegmaradás törvénye:

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0$$

Homogén izotróp esetben a Hooke-törvény

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij} \cdot \Theta \qquad \text{(HH)}$$

A dinamikai egyenletekben használt fogalmak közötti definíciós összefüggések a következők:
A szubsztanciális és a lokális deriválás közötti kapcsolat

$$d_t v_i = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i$$

Az elmozdulás mező és a deformáció tenzor kapcsolata:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i s_j + \partial_j s_i\right)$$

A sebességmező és az elmozdulás mező kapcsolata

$$v_i = \partial_t s_i$$

Áttérünk térelméleti szemléletre. Ekkor kapjuk (a csak lokális deriváltak tartalmazó) Euler-féle mozgás egyenletet.

$$\rho(\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) = \partial_j \sigma_{ij} + f_i$$

Ideális folyadéknál nem lép fel semmiféle (sem statikus, sem dinamikus) nyíró feszültség, azaz

$$\sigma_{ij} = 0 \;\; (i \neq j)$$

Ez azt jelenti, hogy az ideális folyadék Hooke törvényében szereplő anyagállandók közül

$\mu = 0$ kell, hogy legyen,

azaz egyetlen egy rugalmas állandó (Lamé állandó) marad, a λ

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} \cdot \Theta$$

A folyadékok (gázok) esetén a fellépő felületi erőket „*p*” „nyomásnak” nevezzük, ezért (a nyomás előjel konvenció miatt)

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij}$$

Ez beírva a Hooke törvénybe kapjuk, hogy

$$p = -\lambda \cdot \Theta \qquad \text{(H)}$$

Mivel tudjuk, hogy a „Θ” a relatív térfogatváltozás, azaz

$$\Theta = \frac{dV}{V}$$

Ezért

$$p = -\lambda \cdot \frac{dV}{V}$$

Valójában a dinamika az egyensúlyi nyomástól való eltérést jelenti, ezért „*p*” helyébe „*dp*”-t írhatunk
És ezzel

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \equiv \kappa$$

Ez pedig a jól ismert (κ) „kompresszibilitás” definíciója. Ennek a reciproka az ún.”kompresszió modulus”, ami most egyben „λ” is.

$$K = \frac{1}{\kappa} = \lambda$$

Könnyű belátni, hogy a $K = \lambda$ csak folyadékoknál (gázoknál) igaz. Homogén, izotróp szilárd (rugalmas) anyagnál, ahol felléphet statikus nyíró feszültség, a „*K*” értéke más lesz. Ennek oka a következő.
Mint azt tudjuk, egyenletes összenyomás esetén az igénybevétel

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

A Hooke törvény szerint

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij} \cdot \Theta$$

Azaz részletesen

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda \cdot \Theta$$
$$\sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda \cdot \Theta$$
$$\sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda \cdot \Theta$$

Ezeket összeadva és kihasználva az egyenletes összenyomás tényét kapjuk, hogy

$$-3p = 2\mu\Theta + 3\lambda \cdot \Theta$$
$$p = -\left(\frac{2\mu + 3\lambda}{3}\right) \cdot \Theta$$

Azaz (ahogyan azt az előző fejezetben kimondtuk) homogén, izotróp, rugalmas anyagnál a kompresszió modulus értéke a Lamé állandókkal kifejezve a következő

$$K = \frac{2\mu + 3\lambda}{3}$$

Így aztán a folyadékoknál valóban

$$[K]_{\mu=0} = \lambda$$

Mint azt láttuk a munkatétel kontinuum közegek esetén egy mérlegegyenlet alakjában lehet (kell) felírni, a következő képpen

$$\partial_t (\frac{1}{2}\rho v^2) + \partial_j (\frac{1}{2}\rho v^2 v_j - \sigma_{ij} v_i) = v_i f_i - \sigma_{ij} (\partial_j v_i)$$

Folyadékok esetén

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Ezért

$$\partial_t(\frac{1}{2}\rho v^2) + \partial_j(\frac{1}{2}\rho v^2 v_j + p\delta_{ij}v_i) = v_i f_i + p\delta_{ij}(\partial_j v_i)$$

Elvégezve a kijelölt szummázásokat, adódik, hogy

$$\partial_t(\frac{1}{2}\rho v^2) + \partial_j\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_j + p v_j\right) = v_i f_i + p(\partial_j v_j)$$

A baloldal második tagjában a v_j kiemelhető

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \partial_j\left(v_j\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + p\right]\right) = v_i f_i + p(\partial_j v_j) \qquad \text{(EME)}$$

A jobboldal második tagja átírható a következőképpen

$$p(\partial_j v_j) = p\cdot\nabla\vec{v} = p\cdot\nabla(\dot{\vec{s}}) = p\cdot\partial_t(\nabla\vec{s}) = p\cdot\partial_t\Theta$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy a rugalmas potenciális energia sűrűsége definíció szerint

$$\rho_{ER} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

Homogén izotróp anyag esetén ez

$$\rho_{ER} = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\Theta\delta_{ij}\varepsilon_{ij}$$

Folyadékok esetén $\mu = 0$ és emiatt $K = \lambda$, ezért

$$\rho_{ER} = \frac{1}{2}\lambda\Theta\delta_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}K\cdot\Theta^2$$

$$\partial_t\rho_{ER} = K\cdot\Theta\cdot\partial_t\Theta$$

Már láttuk, hogy (H)

$$p = -\lambda\cdot\Theta = -K\cdot\Theta$$

és így

$$\partial_t\rho_{ER} = -p\cdot\partial_t\Theta$$

Ez meg pontosan a (EME) kinetikus energia mérlegegyenletében szereplő forrástag. Ez átvihető a baloldalra és ezzel kapjuk, hogy

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho_{ER}\right) + \partial_j\left(v_j\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + p\right]\right) = v_i f_i \qquad \text{(EME2)}$$

Az egyenletnek nagyon világos fizikai tartalma van.
A baloldal első tagja a térbeli teljes energiasűrűség (kinetikus és rugalmas) időbeli megváltozása. A második tagban egy konvektív energia áramsűrűség van. A jobboldali forrássűrűség pedig a térfogati erő teljesítménye

Minden, amit eddig csináltunk egyformán vonatkozott ideális folyadékra és gázra.
Most nézzük meg, hogy mi az az anyagi tulajdonság, ami különbséget tesz a kétféle halmazállapotú közeg között. Ez a kompresszibilitásuk. Azaz a gázokat viszonylag könnyen összenyomhatók, míg a folyadékok nem

Most foglalkozzunk az összenyomhatatlan folyadékokkal. Ez azt jelenti, hogy $\Theta = 0$, avagy

$$\partial_i v_i = \nabla \vec{v} = 0$$

Ennek következtében pedig a rugalmas energiasűrűség is zérus lesz, hiszen

$$\rho_{ER} = \frac{1}{2} K \cdot \Theta^2 = 0$$

Tételezzük fel továbbá, hogy a térfogati erősűrűség egy U_f fajlagos (azaz tömegegységre eső) skalár potenciális energiából származtatható, amelynek mértékegysége láthatóan $[U_f] = 1\frac{J}{kg}$. A „fajlagos potenciális energiákat" szoktuk „potenciálnak" nevezni. Azaz

$$f_i \equiv -\rho \partial_i U_f$$

Ezzel az energiamérleg egyenlet forrás tagja így alakul

$$v_i f_i = -\rho \cdot v_i \partial_i U_f = -\partial_i (\rho \cdot v_i U_f) + U_f \partial_i (\rho \cdot v_i)$$

Az utolsó tagban a szorzat deriválása elvégezhető

$$\partial_i (\rho \cdot v_i) = \rho \partial_i v_i + v_i \partial_i \rho = \rho \partial_t \Theta + \partial_t \rho$$

Összenyomhatatlan folyadékra $(\Theta = 0)$ tehát az energia forrástagjára adódik, hogy

$$v_i f_i = -\partial_i (\rho \cdot v_i U_f) + U_f \partial_t \rho = -\partial_i (v_i \cdot \rho U_f) + \partial_t (\rho U_f)$$

Az utolsó tagnál kihasználtuk azt, hogy U_f potenciál idő független kell, hogy legyen. Eredményünket beírva az energiamérleg jobboldalára azt kapjuk, hogy

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \partial_j \left(v_j \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p \right] \right) = -\partial_i (v_i \cdot \rho U_f) + \partial_t (\rho U_f)$$

Átrendezés után pedig

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U_f \right) + \partial_j \left(v_j \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U_f \right] \right) = 0$$

Legyen az áramlás stacionárius, azaz nincsen sehol időfüggés. Tehát az egyenletünk első tagja zérus lesz, ezért az energiamérleg így alakul

$$\partial_j \left(v_j \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U_f \right] \right) = 0$$

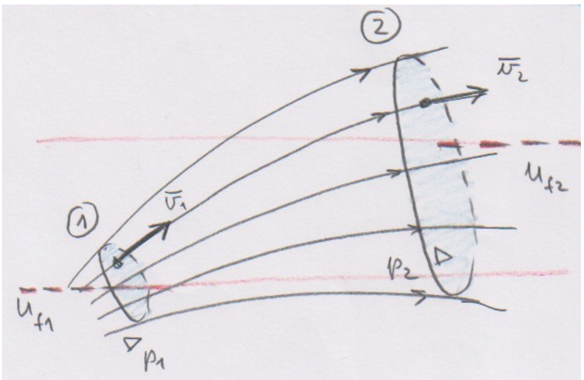
Továbbá elvégezve a szorzat deriválását, kapjuk, hogy

$$\left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U_f \right] \cdot \partial_j v_j + v_j \cdot \partial_j \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U_f \right] = 0$$

A folyadékunkat most összenyomhatatlannak tekintettük, azaz $\partial_i v_i = \nabla \vec{v} = 0$ és ezért az első tag kiesik. Marad tehát, hogy

$$v_j \cdot \partial_j \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U_f \right] = 0$$

Ha egy áramvonal mentén vizsgáljuk az áramlást, akkor mindig a sebességgel párhuzamosan haladunk. Azaz a $v_j \partial_j \equiv \partial_V$ egy áramvonal menti gradienst jelent.



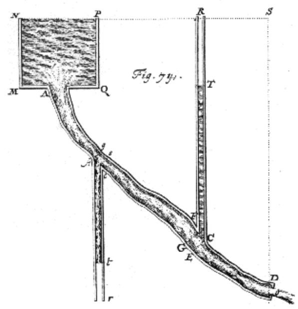
3.ábra

Így az energia megmaradás törvényét egy áramvonal mentén a következő módon fogalmazhatjuk meg

$$\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho U_f\right) = \text{állandó}$$

Megkaptuk a jól ismert Bernoulli-féle törvényt. Ez tehát összenyomhatatlan ideális folyadék áramvonal menti áramlási törvényszerűségét határozza meg

Az iménti gondolatmenet meggyőzően bemutatta a mérlegegyenletek egységes szemléletét és hatékonyságát. A kontinuum mechanikai alapozáskor (fejezet) megkapott energia mérlegből lépésről-lépésre haladva jutottunk el Bernoulli egyenlethez.

	
Daniel BERNOULLI (1700-1782),	

MEGJEGYZÉS: A Bernoulli család szellemi hagyatéka igen jelentős mind a fizika mind pedig a matematika terén. 130 év alatt (1654……1789) nyolc ol"csak" az alábbi három érdekes:

Jacob Bernoulli (1654–1705) akinek a nevét a „Bernoulli számok", a róla elnevezett „differenciálegyenlet" és a „Bernoulli eloszlás" őrzi

Johann Bernoulli (1667–1748) a „brachistochrone" probléma kitűzésével variációszámítás megindítója volt. (lásd: Elm.Fiz.1 /Mechanika elvei)

Daniel Bernoulli (1700-1782) az áramlástan „Bernoulli gyenletének" a megalkotója.

A Bernoulli egyenletet rövidebben is megkaphatjuk. Ennek azonban van egy kis didaktikai „szépséghibája”. Nevezetesen az, hogy használni kell néhány **vektoranalízisből ismert azonosságot míg** az előzőekben végigvitt levezetésben nem kellett „külső matematikai mankóhoz” folyamodnunk. Az új eljárásnak ugyanakkor van egy előnye is. Ennek során nyilvánvalóvá válik majd a folyadékoknak egy eddig „rejtve maradt” tulajdonsága, amely aztán újabb speciális áramlásokhoz vezet

Induljunk ki az Euler-féle mozgás egyenletből és a folyadékokra vonatkozó Hooke törvényből

$$\rho(\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) = \partial_j \sigma_{ij} + f_i$$

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij}$$

Azaz behelyettesítés után

$$\rho \partial_t v_i + \rho v_j \partial_j v_i = -\partial_j \delta_{ij} p + f_i$$

Átosztva a tömegsűrűséggel adódik, hogy

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\frac{\partial_i p}{\rho} + \frac{f_i}{\rho} \qquad (i=1,2,3)$$

Célszerű lesz a „nablásított” változatot használni, azaz folyadékok mozgásegyenlete „vektoros” alakban a következő.

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\vec{f}}{\rho}$$

A baloldal második tagjának az átírásához felhasználhatjuk a **vektoranalízisből ismert azonosságot**, amely szerint.

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

Ezzel kapjuk, hogy

$$\partial_t \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\vec{f}}{\rho}$$

Ha a térfogati erősűrűség konzervatív, akkor mint azt láttuk bevezethető az U_f potenciál (alkalmazkodva a vektoros jelöléshez)

$$\vec{f} \equiv -\rho \cdot \nabla U_f$$

Stacionárius áramláskor $\partial_t \vec{v} = 0$, így aztán átrendezés után kapjuk, hogy

$$\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + U_f\right) + \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

Szorozzuk meg mind a két oldalt a $\vec{v}$ sebességgel párhuzamos $\vec{e}_v$ egységvektorral. Ekkor a jobboldal zérus lesz, mert a $\vec{v} \times (\bullet)$ merőleges a $\vec{v}$-re.

$$\vec{e}_v \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + U_f\right) + \frac{1}{\rho}\vec{e}_v \nabla p = 0 \qquad \text{(VV)}$$

Vegyük még a tömegmegmaradás törvényét

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0$$

Mivel stacionárius az áramlás a tömegsűrűség időben nem változik, ezért ez így alakul

$$\partial_i(\rho v_i) = 0$$

Azaz elvégezve a deriválást

$$\partial_i(\rho v_i) = \rho \cdot \partial_i v_i + v_i \cdot \partial_i \rho = 0$$

Legyen a folyadék összenyomhatatlan

$$\partial_i v_i = \nabla \vec{v} = 0$$

Azaz kapjuk, hogy

$$v_i \cdot \partial_i \rho = 0$$

Ami vektoros alakban

$$\vec{v}\nabla(\rho) = v \cdot \vec{e}_v \nabla(\rho) = 0 \text{, azaz}$$

$$\vec{e}_v \nabla(\rho) = 0$$

Emiatt aztán a (VV) egyenlet második tagjában a ρ bevihető az áramvonal menti gradiens képzésbe, azaz adódik, hogy

$$\vec{e}_v \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + U_f + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Így az áramvonal mentén haladva

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + U_f + \frac{p}{\rho}\right) = \textit{állandó} \qquad \text{(BEM)}$$

Ugyanakkor vegyük észre, hogy az $\vec{e}_v \nabla(\rho) = 0$ kifejezésben két vektor **skalár szorzata** egyenlő zérussal. Azaz ebből még nem következik az, hogy $\rho = \textit{állandó}$, csak annyi, hogy összenyomhatatlan folyadék esetén az áramvonal mentén haladva a folyadék sűrűsége állandó. (Természetesen az áramvonalra merőlegesen változhat.) De ez nekünk éppen elég ahhoz, hogy az áramvonal mentén érvényes (BEM) egyenletet ρ-val beszorozhassuk. Így eljutottunk ismét a jól ismert Bernoulli egyenlethez

$$\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho U_f\right) = \textit{állandó}$$

A következőkben még egy speciális folyadékmozgással ismerkedünk meg ez pedig az összenyomhatatlan, ideális folyadék stacionárius, örvénymentes áramlása.

Induljunk ki a mozgásegyenlet vektoros alakjából

$$\partial_t \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\vec{f}}{\rho}$$

Az itt szereplő második tag lehetőséget ad egy áramlási forma definiálására. Az áramvonal menti vizsgálatunkban (pl. a Bernoulli egyenlet) ez automatikusan „eltűnt”.

Egy áramlást „örvénymentesnek”nevezünk, ha

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

Legyen az áramlás stacionárius, a **nyomás állandó** és **külső** erők se hassanak. Ekkor:

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

így örvénymentes esetben tehát

$$\nabla v^2 = 0$$

A vektoranalízisbeli matematikai összefüggés miatt erre viszont igaz, hogy

$$\nabla v^2 = \nabla(v \cdot v) = 2v \cdot \nabla v = 0$$

azaz

$$\nabla v = 0$$

Összenyomhatatlan folyadék esetén ennél több is igaz

$\nabla \vec{v} = 0$ (DD)

Mivel a sebességmező rotáció mentes, így léteznie kell egy olyan $\Psi(\vec{r})$ sebességpotenciálnak, amelyre igaz az, hogy

$$\vec{v} = \nabla \Psi$$

Ezt beírva az összenyomhatatlan közeget definiáló (DD) egyenletbe azt kapjuk, hogy .

$$\Delta \Psi = 0$$

Ez a jól ismert Laplace egyenlet. Ezt a fizikai feltételek által megszabott peremfeltételekkel megoldva megkapjuk a $\Psi(\vec{r})$ sebességpotenciált és ebből a folyadék áramlását megadó sebességmezőt.

Hanghullámok folyadékokban és gázokban

Mindennapi tapasztalatunk az, hogy a folyadékokban és a gázokban (hang)hullámok képesek terjedni. Ekkor a közeg maga nem áramlik, mégis energia és impulzus terjedést tapasztalunk. Ez a hullám-mozgás egyik fontos sajátossága. A következőkben ezt fogjuk megvizsgálni.

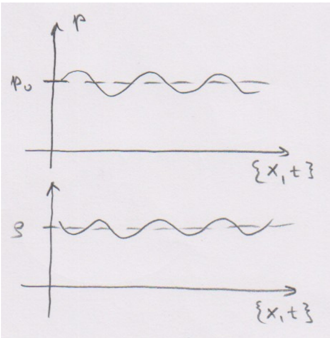
Induljunk ki a folyadékok, gázok Euler egyenletéből

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\frac{\partial_i p}{\rho} + \frac{f_i}{\rho}$$

Nemlineáris tagot elhagyjuk, azaz az elkövetkezőkben csak a lineáris hullámjelenségekkel foglalkozunk Ne legyen térfogati erő sem, mert ez csak elbonyolítja a feladatunkat, ugyanakkor a hullámeffektus lényegéhez nem ad hozzá semmit. Marad tehát

$$\partial_t v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p$$

A hullámjelenség esetén a „p" nyomás és a „ρ" sűrűség a „p_0"és a „ρ_0" egyensúlyi érték körül ingadozik



4.ábra

$$p = p_0 + p'$$
$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

ahol (mint az az ábrából kitűnik)

$$p' << p_0 \text{ de ugyanakkor } \partial p' >> \partial p_0$$
$$\rho' << \rho_0 \text{ de ugyanakkor } \partial \rho' >> \partial \rho_0 \qquad \text{(KF)}$$

Ezen meggondolások eredményeként aztán írhatjuk, hogy a mozgásegyenlet

$$\partial_t v_i + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p' = 0$$

és a tömeg megmaradás törvénye

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \partial_i v_i = 0$$

Deriváljuk ez utóbbi egyenlőség mind a két oldalát az idő szerint és használjuk ki azt, hogy az idő és a hely szerinti deriválás felcserélhető ($\partial_i \partial_t = \partial_t \partial_i$) Így írható, hogy

$$\partial_t^2 \rho' + \rho_0 \partial_i \partial_t v_i = 0$$

A „$\partial_t v_i$" a mozgásegyenletből kifejezhető és ezért

$$\partial_t^2 \rho' - \partial_i \partial_i p' = 0 \qquad \text{(MHE)}$$

Láthatóan ez azonban még nem hullámegyenlet. De tudjuk, hogy az egyenletben szereplő két keresett függvény $\{\rho', p'\} \to \{\rho, p\}$ között (termodinamikai) kapcsolat van. Azaz $\rho(p)$. Ezért bármilyen változás esetén írható, hogy

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\substack{folya-\\mat}} dp$$

A jelenleg vizsgált folyamatok olyan gyorsak, hogy nincsen idő arra, hogy a közeg és a környezete között hőcsere jöhessen létre, ezért

$dQ = 0$, azaz

$S = állandó$

Így erre az adiabatikus állapotváltozásra

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S dp$$

De akkor ez igaz az egyensúlyi értéktől való kis (véges) eltérésekre is, azaz (figyelembe véve a (KF) feltételeinket)

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0}\right)_S p'$$

Ez beírható a (MHE) mozgásegyenletbe, amelyre kapjuk a jól ismert hullámegyenletet

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0}\right)_S \partial_t^2 p' - \partial_i \partial_i p' = 0,$$

azaz operátoros alakba írva

$$\Delta p' = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p'$$

Ahol a hullám sebessége tehát

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right)_S}$$

Hasonló módszerrel ugyanilyen hullámegyenlet adódik a sűrűségváltozásra is, azaz

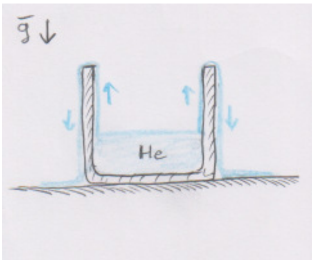
$$\Delta \rho' = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \rho'$$

Súrlódó folyadékok áramlása, a Navier-Stokes egyenlet

Eddig ideális folyadékok áramlásával foglalkoztunk. Az ideális folyadékokban sem statikus, sem pedig dinamikus viszkozitás (belső súrlódás) nem lép fel. Reális folyadékok ugyan statikus viszkozitással nem rendelkeznek, de dinamikussal igen. A dinamika most azt jelenti, hogy a belső súrlódás a deformáció sebességétől függ. A függés lineáris.

Mindennapi tapasztalatok mutatják, hogy a folyadékok igenis rendelkeznek viszkozitással. Gondoljuk el azt, hogy pl. egy golyót folyadékban (pl. vízben) mozgatunk. Ha a víz ideális folyadék lenne, akkor a meglökött golyó minden ellenállás nélkül tudna mozogni benne és magára hagyva egyenletes mozgást végezne. Ha úgy tetszik „soha nem állna meg". Természetesen ilyet (normális körülmények között) még soha nem tapasztaltunk. Egy reális folyadékmodell kidolgozása tehát egyáltalán nem érdektelen feladat. A következőkben erről lesz szó.

MEGJEGYZÉS: A Természet és az atomok fizikája azonban sokkal érdekesebb és furcsább, mint azt gondolnánk. Igen alacsony hőmérsékleten egyes anyagok (pl. He) elveszti a dinamikus viszkozitását. Ennek következtében meglepő makroszkopikus mozgásokat tud produkálni. Például felkúszik a tartóedény belső falán és mintegy „kimászik" az edényből A dinamikus viszkozitás eltűnése tipikus kvantummechanikai effektus. A kvantumstatisztikák tanulása során még találkozhatunk vele.



5. ábra

A belső súrlódás egy felületi erő, hiszen a szomszédos folyadékrétegek egymáshoz képesti csúszásakor lép fel. Mint minden felületi erő, ez is egy tenzorral jellemezhető.
Legyen tehát a dinamikai viszkozitást megadó tenzor

$\hat{\sigma}'\left(\hat{\dot{\varepsilon}}\right)$, azaz mátrix alakban $\sigma'_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}\right)$.

Ahol

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i \dot{s}_j + \partial_j \dot{s}_i\right)$$

és

$$v_i = \dot{s}_i .$$

Mivel a σ_{ij} és az $\dot{\varepsilon}_{kl}$ között lineáris kapcsolat van, ezért homogén, izotróp folyadékok esetén ugyanazt a gondolatmenetet lehet követni, mint a rugalmas tulajdonságok esetén.
Ott azt láttuk, hogy

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\cdot\Theta , \qquad \text{(rugalmas fejezet HH)}$$

ahol $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \sum_i \varepsilon_{ii}$, ami a relatív térfogatváltozás.

Ennek a mintájára adódik, hogy

$$\sigma'_{ij} = 2\mu'\dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda'\delta_{ij}\cdot\dot{\Theta}$$

A jobb oldal második tagjában lévő relatív térfogatváltozás időderiváltja

$$\dot{\Theta} = \sum_k \dot{\varepsilon}_{kk} = \partial_t\left(\partial_k s_k\right) = \partial_k \dot{s}_k = \partial_k v_k = \nabla\vec{v}$$

Beírva ide az $\dot{\varepsilon}_{ij}$ definícióját a következő kifejezéshez jutunk

$$\sigma'_{ij} = \mu'\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right) + \lambda'\delta_{ij}\left(\partial_k v_k\right)$$

Ami azt jelenti, hogy

$$\sigma'_{ij} = \begin{cases} \mu'\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right) & \text{ha} \quad i \neq j \\ \mu' 2\partial_i v_i + \lambda' \sum\limits_k \partial_k v_k & \text{ha} \quad i = j \end{cases}$$

Az $(i = j)$ esetben azért írtuk ki a $\sum\limits_k \partial_k v_k$ szumma jelet, mert az első tagban szereplő „$\mu' 2\partial_i v_i$”-ben természetesen **nem kell** az „i”-re szummázni. Itt azonos átalakítással a következő alak kapható

$$\sigma'_{ii} = \mu' 2\partial_i v_i + \mu'\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\sum_k \partial_k v_k + \lambda' \sum_k \partial_k v_k$$

$$\sigma'_{ii} = \mu'\left(2\partial_i v_i - \frac{2}{3}\sum_k \partial_k v_k\right) + \left(\lambda' + \frac{2}{3}\mu'\right)\sum_k \partial_k v_k$$

Új jelölést vezetünk be, legyen

$$\eta \equiv \mu'$$

$$\zeta \equiv \lambda' + \frac{2}{3}\mu'$$

Ezekkel írható, hogy

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\sum_k \partial_k v_k\right) + \zeta\left(\delta_{ij}\sum_k \partial_k v_k\right)$$

Az előbbiek alapján tehát a viszkózus folyadék Euler-féle mozgásegyenlete a következő.

$$\rho(\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) = \partial_j \sigma'_{ij} + f_i$$

Ebben szerepel a $\partial_j \sigma'_{ij}$ viszkozitási tenzor divergenciája. Végezzük el a deriválást és az összegzést (a „*j*”-re). Látható, hogy most minden azonos indexre összegezni kell ezért elhagyjuk az összes „$\sum\limits_k(\bullet)$” jelet. (Figyeljünk az Einstein-féle szummázási, „egyforma index” konvencióra!) Ezzel azt kapjuk, hogy

$$\partial_j \sigma'_{ij} = \eta\left[\partial_j \partial_i v_j + \partial_j \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_j\left(\partial_k v_k\right)\right] + \zeta\left[\delta_{ij}\partial_j\left(\partial_k v_k\right)\right]$$

A jobboldal első és harmadik tagja összevonható, azaz

$$\partial_j \partial_i v_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_j\left(\partial_k v_k\right) = \partial_i\left(\partial_j v_j\right) - \frac{2}{3}\partial_i\left(\partial_k v_k\right) = \frac{1}{3}\partial_i\left(\partial_k v_k\right)$$

Az utolsó tag pedig

$$\delta_{ij}\partial_j\left(\partial_k v_k\right) = \partial_i\left(\partial_k v_k\right)$$

Ezek után adódik, hogy

$$\partial_j \sigma'_{ij} = \eta \partial_j \partial_j v_i + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\partial_i\left(\partial_k v_k\right) \qquad (i=1,2,3)$$

Vagy ugyanez vektor alakban

$$\nabla\hat{\sigma} = \eta\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\left(\nabla\vec{v}\right)$$

A mozgásegyenlet ennek alapján tehát a következő

$$\rho\left(\partial_t\vec{v}+\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}\right)=-\nabla p+\vec{f}+\eta\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\left(\nabla\vec{v}\right)$$

Legyen a folyadék összenyomhatatlan, azaz

$$\nabla\vec{v}=0$$

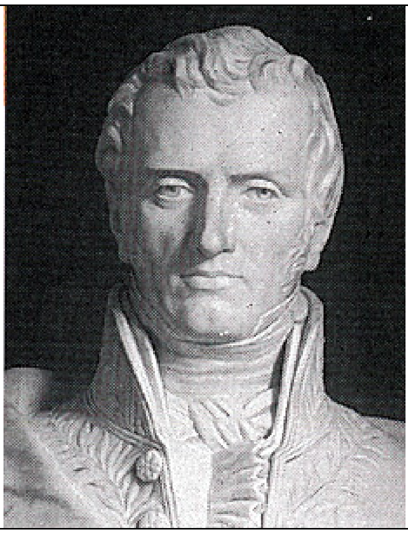
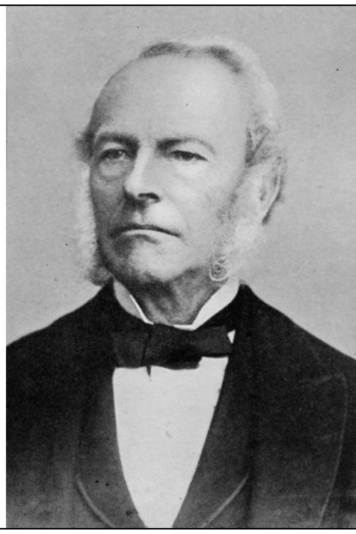
és ezért

$$\rho\{\partial_t\vec{v}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\}=-\nabla p+\vec{f}+\eta\Delta\vec{v}$$

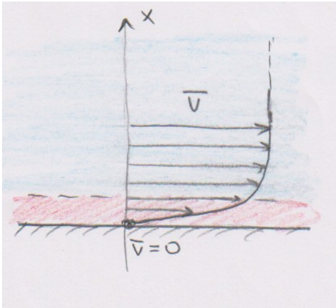
Átírva a szokásos komponensenkénti egyenletekre

$$\rho\{\partial_t v_i+(v_j\partial_j)v_i\}=-\partial_i p+f_i+\eta\partial_k\partial_k v_i$$

Az egyenlet neve „Navier-Stokes” egyenlet, amely lehetőséget ad összenyomhatatlan, viszkózus folyadék stacionárius $\vec{v}\left(\vec{r}\right)$ sebességterének a meghatározására. („Navier” ejtése „navié”) Ehhez természetesen ismerni kell peremfeltételeket, azaz egy zárt felület mentén meg kell adnunk sebességtér értékét.

	
Louis Marie Henri NAVIER (1785-1836).	**George Gabriel STOKES** (1819-1903)

A „Navier-Stokes” (NS) egyenlet számítása nem egyszerű feladat. De ugyanakkor a műszaki életben nagyon fontos. Az áramlástani modellezések numerikus szimulációja manapság is vezető helyen van a Világ gépidő felhasználásának a statisztikájában. Így aztán minden hasznos ötlet „jól jön”. Egy jó közelítő modellhez jutunk akkor, ha a falat „tapadónak” képzeljük el, amely mentén a folyadék nem mozog. A viszkozitás következtében a folyadék sebessége, a faltól távolodva fokozatosan növekszik. Ezt a tartományt határrétegnek nevezzük. Ebben a tartományban a folyadék reális (NS) modelljét kell használnunk. A határrétegen kívül a folyadékot már ideálisnak tekinthetjük.



6. ábra

A NS egyenlet matematikai alakjából további fontos fizikai következtetéseket vonhatunk le. Ehhez „csak” a vektoranalízisben tanultakat kell felidéznünk. Mint az ismeretes egy tetszőleges $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőre igaz, hogy

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v})=\nabla(\nabla\vec{v})-\Delta\vec{v}$$

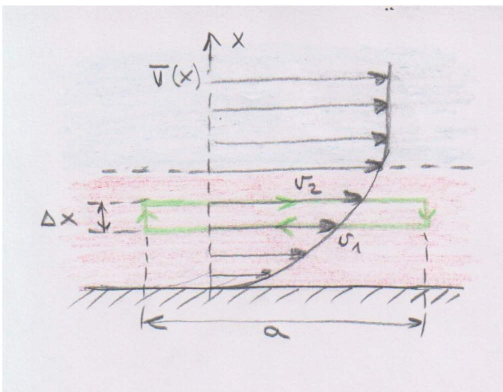
Ha a $\vec{v}(\vec{r})$ az NS egyenletben szereplő sebességtér, akkor $\nabla\vec{v}=0$, hiszen összenyomhatatlan folyadék áramlásáról van szó. Így az NS egyenlet a következő alakot ölti.

$$\rho\{\partial_t\vec{v}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\}=-\nabla p+\vec{f}+\eta[\nabla\times(\nabla\times\vec{v})]$$

Azaz ha a súrlódás valóban beleszól a folyadék mozgásába (márpedig az NS egyenlet éppen ezt állítja) akkor a $\nabla\times\vec{v}=0$ nem lehet az áramlási tér minden pontjában igaz. Hiszen akkor „η” eltűnne az egyenletből.

Tehát **súrlódásos folyadék áramlási terében kell lennie örvényeknek!**

Pl magában a határrétegben ez tipikusan teljesül. Erről könnyen meggyőződhetünk. Ugyanis, ha felveszünk itt egy zárt görbét és a sebességteret ennek a mentén kiintegráljuk, ekkor az eredmény láthatóan nem lesz zérus.



7. ábra

$$\oint\vec{v}d\vec{r}=v_2a-v_1a=(v_2-v_1)a\neq 0$$

Az eredmény nyilvánvaló, hiszen a határrétegben, az álló faltól távolodva a sebesség nagysága egyre nagyobb lesz ($v_2\geq v_1$).

A reális folyadékok áramlása és a termodinamika

A reális folyadékok áramlását tehát a Navier –Stokes (NS) egyenlet írja le.

$$\rho\{\partial_t v_i+(v_j\partial_j)v_i\}=-\partial_i p+f_i+\eta\partial_k\partial_k v_i$$

Az ideális folyadékoknál tanultak alapján a kinetikus energia változását leíró (mérleg) egyenlet könnyen megkonstruálható. Most is a kontinuum mechanika általános energia mérleg egyenletéből kell kiindulnunk.

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\partial_j\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_j-\sigma_{ij}v_i\right)=v_i f_i-\sigma_{ij}(\partial_j v_i)$$

Ideális folyadékok esetén a feszültség tenzor statikus nyírást nem tartalmazhatott, ezért

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$$

Viszkózus folyadéknál a statikus viszkozitás továbbra sem lép fel, de dinamikus viszkozitás igen, ezért

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij}$$

Ezt beírva az általános mérlegegyenletbe azt kapjuk, hogy-

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\partial_j\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_j+p\delta_{ij}v_j-v_i\sigma'_{ij}\right)=f_i v_i+p\delta_{ij}\left(\partial_j v_j\right)-\sigma'_{ij}\left(\partial_j v_i\right)$$

Ahol a dinamikai viszkozitás a sebesség mező térbeli változásától, vagyis a szomszédos folyadék rétegek egymáshoz képesti sebességétől függ. Azaz a definíció szerint

$$\sigma'_{ij}=\eta\left(\partial_i v_j+\partial_j v_i\right)$$

Itt az általános $\sigma'_{ij}=\mu'\left(\partial_i v_j+\partial_j v_i\right)+\lambda'\delta_{ij}\left(\partial_k v_k\right)$ definíciós összefüggésben felhasználtuk azt, hogy most összenyomhatatlan folyadékról van szó ($\partial_k v_k=0$) és, hogy a jelölésben $\eta\equiv\mu'$

Vegyünk egy álló „*V*” térfogatú térrészt, amelyet a mozgó folyadék „természetes” határai vesznek körül (pl. a cső fala, vagy az áramló folyadékba merülő álló akadályok, stb…). Legyen a térfogat felülete „*A*”. Tekintsük a folyadékot összenyomhatatlannak ($\nabla\vec{v}\equiv\partial_j v_j=0$) és a térfogati erőket (pl. gravitáció) hanyagoljuk el ($\vec{f}=0$). Írjuk fel az energia mérleget erre a megadott makroszkopikus térrészre:

$$\partial_t\int_V\frac{1}{2}\rho v^2 dV+\oint_A\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_j+pv_j-v_i\sigma'_{ij}\right)dA_j=-\int_V\sigma'_{ij}\,\partial_j v_i dV$$

Tudjuk, hogy a „határréteg elmélet” értelmében a folyadékot határoló álló felületek mentén a folyadék sebessége zérus. Ezért a felületi integrál kiesik, hiszen minden tagja tartalmazza a $\vec{v}$ sebességet. Az egyenlet jobb oldalán lévő „forrás tagban” a súrlódásból adódó belső felületi erőhatásokat a $\sigma'_{ij}=\eta\left(\partial_i v_j+\partial_j v_i\right)$ dinamikus feszültség tenzor írja le.

Ennek kiszámításához végezzük el az alábbi matematikai átalakítást. Itt most kiírjuk a $\sum_{i,k}[\ ]$ kettős szumma jelet, hogy „vezesse a szemünket”.

$$\left(\partial_j v_i+\partial_i v_j\right)^2\equiv\sum_{i,j}\left(\partial_j v_i+\partial_i v_j\right)\left(\partial_j v_i+\partial_i v_j\right)=\sum_{i,j}\left[\left(\partial_j v_i\right)^2+2\partial_j v_i\cdot\partial_i v_j+\left(\partial_i v_j\right)^2\right]=$$

$$=2\sum_{\mathrm{i,j}}\left[\left(\partial_j v_i\right)^2+\partial_j v_i\cdot\partial_i v_j\right]=2\sum_{\mathrm{i,j}}\left(\partial_j v_i+\partial_i v_j\right)\left(\partial_j v_i\right)=\sum_{i,j}\frac{2}{\eta}\sigma'_{ij}\partial_j v_i$$

Ez pedig éppen a mérlegegyenlet bal oldalán szereplő (negatív) energiaforrás sűrűség. Azaz megadja a **kinetikus** energia disszipációját (**eltűnését**) a súrlódásos áramlás során. A fenti egyenlet baloldalán tulajdonképpen a deformációs tenzor időbeli változási sebessége áll.

$$\sum_{i,j}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 \equiv \sum_{i,j}(\partial_t \varepsilon_{ij})(\partial_t \varepsilon_{ij}) = \sum_{i,j} \dot{\varepsilon}_{ij}^2$$

Ez beírható az energia mérleg egyenletbe és evvel a munkatéthez hasonló összefüggést kapunk:

$$\partial_t \int_V \frac{1}{2}\rho v^2 dV = -\frac{\eta}{2}\int_V \sum_{i,j} \dot{\varepsilon}_{ij}{}^2 dV \equiv -\frac{dQ}{dt}$$

Azaz a folyadék kinetikus energiáját a belső dinamikus súrlódás (viszkozitás) csökkenti. Ez az a mechanikai energia, amelyik „eltűnik” a rendszerből. Tudjuk azonban, hogy az „energia megmaradás” univerzális elvének most is teljesülnie kell. Ezért a disszipációs energia nem lehet más, mint az a mechanikai energia, amelyik eddig a rendezett $\vec{v}(\vec{r})$ áramlási sebességhez kapcsolódott, $(1/2 \cdot \rho v^2)$, de most átalakult rendezetlen mozgást végző részecskék a kinetikus energiájává. Ez pedig nem más, mint a jól ismert (*dQ*) hőmennyiség. Ahogyan azt a termodinamika kinetikus alapjainál megtanultuk.
A valóságban ez a hőmennyiség nem tud mind eltávozni a folyadékból, hanem emeli annak a „$T(\vec{r})$” hőmérséklet eloszlását. Ezáltal megváltoz(hat)nak a viszkozitási tulajdonságok. Így „η” már nem lesz állandó, hanem $\eta(T\{\vec{r}\})$. Ezért aztán a Navier-Stokes egyenleteket ki kell egészíteni a termodinamika egyenleteivel is. Ezáltal persze a dolog reménytelenül elbonyolódik, sok hasznos munkát adva ezzel a szimulációs (fizikus) szakembereknek és a szoftver fejlesztő cégeknek.

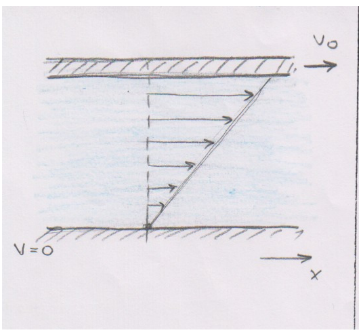
Egyszerű feladat a Navier-Stokes egyelet megoldására: a Hagen-Poiseuile gyenlet

(„Poiseuille” ejtése „poaszőj”)

Láttuk, hogy a Navier-Stokes egyenlet az ismeretlen $v_i(\vec{r})$ sebességkomponensek helykoordináták szerinti parciális deriváltjait tartalmazza. Ugyanakkor megjelenik benn a „$(v_j \partial_j)v_i$” nem lineáris tag is. Tehát egy nemlineáris parciális differenciálegyenletet kellene megoldanunk, adott perem-és kezdeti feltételek eseté. (A „peremfeltételek” térbeli, a „kezdeti feltételek” időbeli kiinduló adatokat jelent.). A nemlineáris egyenletek megoldása igen bonyolult feladat legtöbbször csak közelítő, vagy numerikus megoldások jöhetnek szóba. A most következő probléma azért fontos, mert ebben az esetben a **Navier-Stokes egyenlet egzaktul megoldható.** A megoldás egyszerű **mérésekkel** könnyen ellenőrizhető. Ezáltal tesztelhetjük az NS egyenletet

Bevezetésül tekintsük a következő modell feladatot!

Vegyünk két, egymással párhuzamos, végtelen nagy síklapot. Az egyik álljon az *(x,y)* síkban, a másik v_0 nagyságú sebességgel mozogjon pl. az „*x*” irányban. A mozgó lemez helyzetét az „*y=a*” egyenlet definiálja. A lemez sebessége tehát $\vec{v}_L(v_0,0,0)$. A két sík között valódi folyadék van. Egyéb (erő)hatás nincsen. Az előzményekből tudjuk („határréteg elmélet”), hogy a folyadéknak a lapokkal érintkező rétege laphoz képest áll.



1.ábra

Ez azt jelenti, hogy a folyadék áramlási sebességének csak „*x*" komponense lehet, és az csak az „y" koordinátától függhet, azaz $v_x(y)$. Valamint eleget kell tenni a következő peremfeltételeknek.

$$v_x(0)=0$$
$$v_x(a)=v_0$$

Határozzuk meg a folyadék sebesség „profilját", azaz a $v_x(y)$ függvényt.

Azért tettük ki a feladat legelején „modell" jelzőt, hogy tudatosítsuk azt, hogy a fizikai elrendezés valóságban nem kivitelezhető, hiszen mint azt látjuk, végtelen nagy síkokról van szó.

A feladat megoldása nyilvánvalóan a Navier-Stokes egyenlet megoldását jelenti.

$$\rho\{\partial_t v_x + (v_j\partial_j)v_x\} = -\partial_x p + f_x + \eta\partial_k\partial_k v_x$$

A feladat kiírása értelmében „ $p=0$", „ $\vec{f}=0$" és csak egyetlen $v_x(y)$ sebességkomponens van. Ezzel kapjuk, hogy:

$$\rho\{\partial_t v_x + (v_x\partial_x)v_x\} = \eta\partial_k\partial_k v_x$$

Stacionárius áramlás esetén „$\partial_t = 0$" és $v_x(y)$ miatt a $(v_x\partial_x)v_x = 0$. Adódik tehát az, hogy

$$\partial_k\partial_k v_x(y)=0$$

Azaz

$$\partial_y^2 v_x(y)=0$$

Ennek általános magoldása triviális

$$v_x(y)=c_1 y + c_2$$

Az integrálási állandók a peremfeltételekből adódnak, azaz

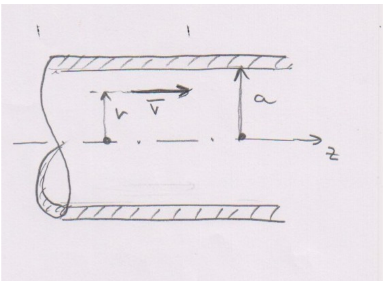
$$v_x(0)=c_2=0$$
$$v_x(a)=c_1 a = v_0$$

és ezzel

$$v_x(y)=\frac{v_0}{a}y$$

Ez pedig a jól ismert „Newton féle" viszkozus áramlási törvény.

Ezen „bemelegítés" után térjünk rá a „valódi" feladatunkra.
A feladat a következő.



2.ábra

Adott egy „*z*" tengelyű, „*L*" hosszúságú, „*a*" sugarú,vízszintes cső, amelyben súrlódó folyadék áramlik.

a.) Az áramlás stacionárius, azaz $\partial_t v_i(x,y,z)=0$.

b.) Az áramlás legyen lamináris.

c.) A cső elején a nyomás „ $p(x=0)=p_0$" , a végén „ $p(x=L)=p_L$"

d.) Tömegerők nem hatnak (pl a gravitáció elhanyagolható) azaz $\vec{f}=0$

e.) A folyadék összenyomhatatlan, $\partial_j v_j = 0$

Határozzuk meg a csövön átfolyó (folyadék) áramot!

Először most is a sebességprofilt kell meghatároznunk, amihez a Navier-Stokes egyenletet kell megoldanunk.

$$\rho\{\partial_t v_i + (v_j \partial_j) v_i\} = -\partial_i p + f_i + \eta \partial_k \partial_k v_i$$

Az **a.)** és a **d.)** feltételek miatt, az NS így alakul.

$$\rho\{(v_j \partial_j) v_i\} = -\partial_i p + \eta \partial_k \partial_k v_i$$

Mivel az áramlás „z" irányú, ezért

$$v_x \equiv 0$$

$$v_y \equiv 0$$

Az **e.)** értelmében

$$\partial_j v_j = 0$$

és így

$$\partial_z v_z = 0$$

Ennek a megoldása pedig

$v_z(x, y)$ változójú függvény, amelyet beírva az N-S egyenletbe

$$\rho\{(v_z \partial_z) v_z\} = -\partial_z p + \eta \partial_k \partial_k v_z$$

A baloldal azonban zérus, hiszen $v_z(x, y)$ nem függ a „z"-től. Marad tehát a következő

$$\eta \partial_k \partial_k v_z = \partial_z p$$

Egy fontos dolog történt most: a nemlineáris tag kiesett!.. Nem elhanyagoltuk, hanem egzakt számolás során eltűnt az egyenletből. Ennek következtében a keresett $v_z(x, y)$-re egy lineáris egyenlet (egy ún. Poisson egyenlet) adódott, amelyik minden nehézség nélkül megoldható. Használva a „nablásított" jelölést $\partial_k \partial_k \equiv \Delta$

$$\eta \Delta v_z = \partial_z p$$

Most célszerű lesz a feladat peremfeltételeihez (henger alakú cső) jobban illeszkedő, $\{r, \varphi, z\}$ henger koordináta rendszerre áttérni. Ekkor a hengeres szimmetria miatt $v_z(x, y) \to v_z(r)$ lesz. A matematikából ismerjük a „Δ" (ún. Laplace) operátor hengerkoordinátás alakját:

$$\Delta \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ezt beírva a leegyszerűsödött Navier-Stokes egyenletünkbe azt kapjuk, hogy

$$\eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \partial_z p$$

Az egyenlet bal oldala $v_z(r)$ miatt csak „r" változótól függ, míg a jobboldal a $p(z)$ nyomás függvény miatt csak a „z"-től. Természetesen ez a differenciál egyenlet a tér minden (r, φ, z) pontjában meg kell, hogy határozza az áramlási viszonyokat. Mivel pedig az (r, φ, z) változók egymástól függetlenek, a fenti Poisson egyenlet csak akkor teljesülhet, ha az egyenlet mindkét oldala ugyanazzal az „C_1" állandóval egyenlő. A „C_1"-et a peremfeltételek határozzák meg. Írhatjuk tehát, hogy

$$\eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = C_1$$

és

$$\partial_z p = C_1$$

Ezek egymástól függetlenül megoldhatók.

A második az egyszerűbb, hiszen ennek megoldása szinte fejből adódik: A nyomásra kirótt peremfeltételeknek megfelelően azt kapjuk, hogy

$$p(z) = \frac{p_L - p_0}{L} z + p_0$$

Azaz

$$C_1 = \frac{p_L - p_0}{L} \qquad \text{C}$$

A másik egyenlet már bonyolultabb, de nem sokkal nehezebb a megoldása.

$$\eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = C_1$$

Átrendezés után

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{C_1}{\eta} r$$

Integráljuk mind a két oldalt

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{C_1}{2\eta} r^2 + C_2$$

Ismét átrendezünk

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{C_1}{2\eta} r + \frac{C_2}{r}$$

Integrálás után adódik, hogy

$$v_z = \frac{C_1}{4\eta} r^2 + C_2 \ln r + C_3$$

A tengely mentén $(r = 0)$ a v_z sebességnek végesnek kell lennie, ezért „$\ln r$" nem lehet jó megoldás. Ezért $C_2 = 0$ kell, hogy legyen. Marad tehát, hogy

$$v_z = \frac{C_1}{4\eta} r^2 + C_3$$

De a peremfeltételek szerint a cső falánál a folyadék sebessége zérus, tehát

$$v_z(a) = \left[\frac{C_1}{4\eta} r^2\right]_{r=a} + C_3 = 0$$

Azaz

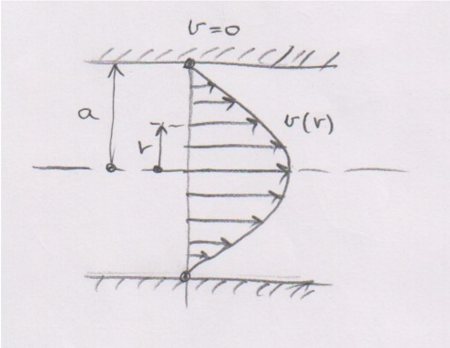
$$C_3 = -\frac{C_1}{4\eta} a^2$$

És ezzel kaptuk, hogy

$$v_z(r) = C_1 \frac{1}{4\eta}\left(r^2 - a^2\right)$$

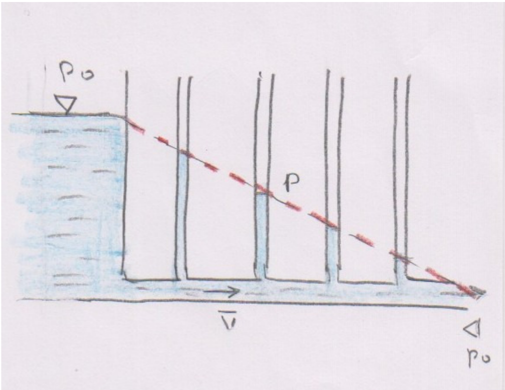
Beírva ide a C_1 fentebb, (C)-ben kapott értékét

$$v_z(r) = \frac{p_0 - p_{LL}}{L}\frac{1}{4\eta}\left(a^2 - r^2\right) \qquad \text{V.}$$



3.ábra

Mivel a $v_z(r) \geq 0$, és $r \leq a$, ezért $p_0 \geq p_L$ kell, hogy legyen. Azaz a nyomás a belső súrlódás miatt az áramlás irányában csökken. Ne feledjük, hogy ideális folyadék esetén a nyomás a cső mentén állandó maradna.(lásd a Bernoulli egyenlet)



4.ábra

A V. ismeretében a csőben folyó folyadékáram erőssége könnyen kiszámitható, hiszen

$$I_m = \frac{dm}{dt} = \int_{A0} \rho \cdot v_z dA,$$

ahol $A_0 = a^2\pi$, a cső keresztmetszete.

$$I_m = \frac{dm}{dt} = \int_0^a 2\pi r\rho \cdot v_z dr = \frac{\pi}{8\eta}\rho \cdot a^4 \frac{p_0 - p_L}{L}$$

Ezzel megkaptuk az ún. Hagen-Poiseuile gyenletet , amely megadja egy viszkózus (reális) folyadék áramerősségét egy kör keresztmetszetű csőben történő áramlás során.

A megoldásunk teljesen pontos volt. Közelítést sehol nem alkalmaztunk.
Ugyanakkor **a mérések tanulsága szerint** ez a törvény csak egy kritikus sebesség alatt érvényes. E fölött ugyanis megszűnik az áramlás laminárisnak lenni és turbulencia indul el. Ez azért érdekes, mert ezek szerint a turbulenciát nem a „nemlineáris” tag okozza.
„Hát akkor mi?” merül fel a jogos kérdés!

A lamináris és a turbulens áramlás

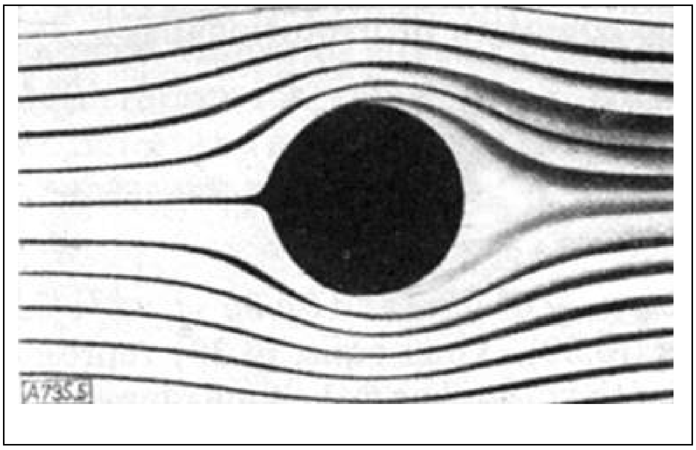
Mint azt láttuk a „hidrodinamika” Euler-féle térelméleti szemlélete esetén a $\vec{v}(\vec{r},t)$ sebességmező dinamikáját határozzuk meg. Reális folyadékoknál ez a Navier-Stokes egyenlet megoldását jelenti. Egy adott áramlás kísérleti vizsgálata nagyon fontos, hiszen az NS egyenlet közelítő (numerikus, szimulációs) eredmények ellenőrzése csak így lehetséges.

Az áramlások „szemléltetésére” többféle fogalmat használunk. Ha egy kiszemelt részecske mozgását követjük, akkor a „**pályát**” kapjuk meg. Pl az áramló folyadékban egy porszem mozgása jó közelítéssel egy folyadékrészecske pályáját követi. Ha egy szélcsatornában a „füstcsíkokat” lefényképezzük, akkor ezek az ún. „**nyomvonalakat**” adják. Egy adott időpillanatban egy nyomvonal mentén azok a koromszemcsék helyezkednek el, amelyek előzőleg a térnek ugyanazon a pontján mentek át. Láthatólag az nem azonos a „pályával”. Míg az „**áramvonal**” a $\vec{v}(\vec{r},t)$ sebességmezőnek a „*t*” időpontban vett burkológörbéje. Általános esetben ez három „áramlási jellemző” természetesen különbözni fog egymástól. Könnyen belátható azonban, hogy (időfüggetlen) stacionárius áramlás esetén ez a három egybeesik.

A kísérleti áramlástan a fent említett áramlási képek technikai megjelenítésével, az ezzel kapcsolatos gyakorlati módszerek kialakításával és a mérési eredmények kiértékelésével foglakozik. Erre sok ötletes eljárás létezik. Ezek során általában az áramló közegbe, avval könnyen együtt mozgó parányi testecskék (fényszóró szemcsék, füstszemcsék, olajszemcsék, hidrogén buborékok stb) sokaságát juttatnak és azok mozgását fényképészeti módszerekkel rögzítik. A gyakorlott áramlástani szakember ebből tud következtetni a $\vec{v}(\vec{r},t)$ áramlási térre (sebességmezőre).

Az áramlások osztályozása a „vizuális” élményt követi. Ekkor azonban nem csak egy felszínes „látszatból” ítélünk. Az áramlási kép megváltozása alapvető fizikai folyamatokra utal.

Lamináris áramláskor (a megnevezés a latin „rétegre” utal) az egymással párhuzamosan mozgó folyadékrétegek nem „keverednek” össze. A stacionárius áramlás megjelenítésekor folyamatos” áramvonalakat látunk.



5.ábra

Ez természetesen nem azt jelenti, hogy a szomszédos folyadékrétegek között nincsen kapcsolat, hiszen a dinamikus viszkozitás jelen van. Ez azonban az érintkező folyadékrétegek között „csak” egy rendezetlen diffúziós kölcsönhatást jelent. Erről a Kísérleti Fizika tantárgyban már tanultunk. Lamináris áramlásnál tehát a két szomszédos réteg között a kölcsönhatást „diffúziós impulzus átadás” valósítja meg.

MEGJEGYZÉS: Emlékeztetőül ismételjük röviden át az ott tanultakat.
A kinetikus elmélet alapján láttuk, hogy a diffúzió annak a következménye, hogy a térben a $n(\vec{r})$ részecskesűrűség nem állandó. A részecskék véletlenszerű hőmozgásának az lesz a következménye, hogy átlagosan több részecske fog mozogni a kisebb koncentrációjú helyek felé, mint fordítva. Ennek eredőjeként egy $\vec{j}_D$ diffúziós áramsűrűség lép fel. Elemi levezetés után a következő összefüggést kaptuk:

$$\vec{j}_D = -D \cdot \nabla n$$

Ahol a diffúziós állandó az $\langle v \rangle$ átlagsebesség és az $\langle l \rangle$ átlagos szabad úthosszal kifejezhető

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$$

A termikus mozgás következtében az egyik rétegből a másikba, véletlenszerűen átlépő molekulák viszik magukkal az impulzusukat is. Ezek az átment molekulák a helyiekkel ütközve azoknak vagy impulzust adnak át, vagy vesznek fel. Ezáltal lassítva, vagy gyorsítva ezt a réteget. Azaz a szomszédos rétegek között, a makroszkopikus skálán egy „nyíró erő” lép fel. A jelenség neve a viszkozitás. A két réteget elválasztó felület legyen az $\{x, y\}$ sík és a rá merőleges irány a „z”. A rétegek az „x” irányban mozognak $u_x(z)$ sebességgel. Ekkor a számolás eredménye a következő lett:

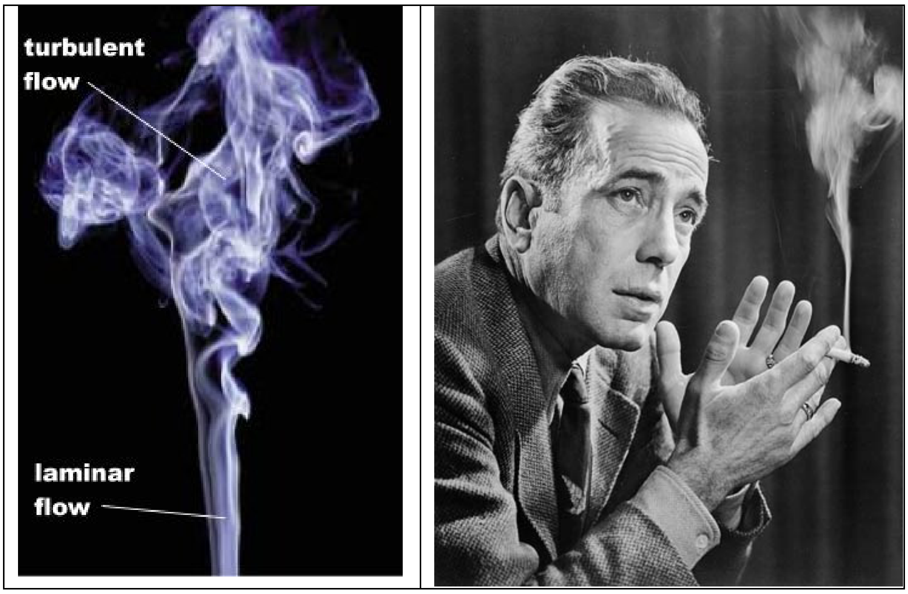
$$\tau = -\eta \frac{du_x}{dz}$$

A viszkozitási tényezőre pedig adódott, hogy

$$\eta = D \cdot \rho_m$$

Ahol „D” az előbb bevezetett diffúziós tényező, és „ ρ_m ” a tömegsűrűség.
Látható tehát, hogy a viszkozitást csak egyetlen η tényező jellemzi. Ezeket a folyadékokat „Newtoni folyadékoknak” nevezzük. Látható, hogy a viszkozitás egy „impulzus diffúziót „ jelent.

Elegendően kicsi sebességeknél a valódi folyadékok áramlása lamináris lesz. Ha növekszik a folyadék sebessége, akkor egy bizonyos sebességhatár felett az áramlási kép lassan megváltozik.



(Turbulencia a filmművészetben: **Humphrey Bogart)**
6.ábra

Az áramvonalak összekuszálódnak, a folyadék „gomolygó”, időben állandóan változó örvényekből álló mozgást fog végezni. Ez a turbulencia jelensége.

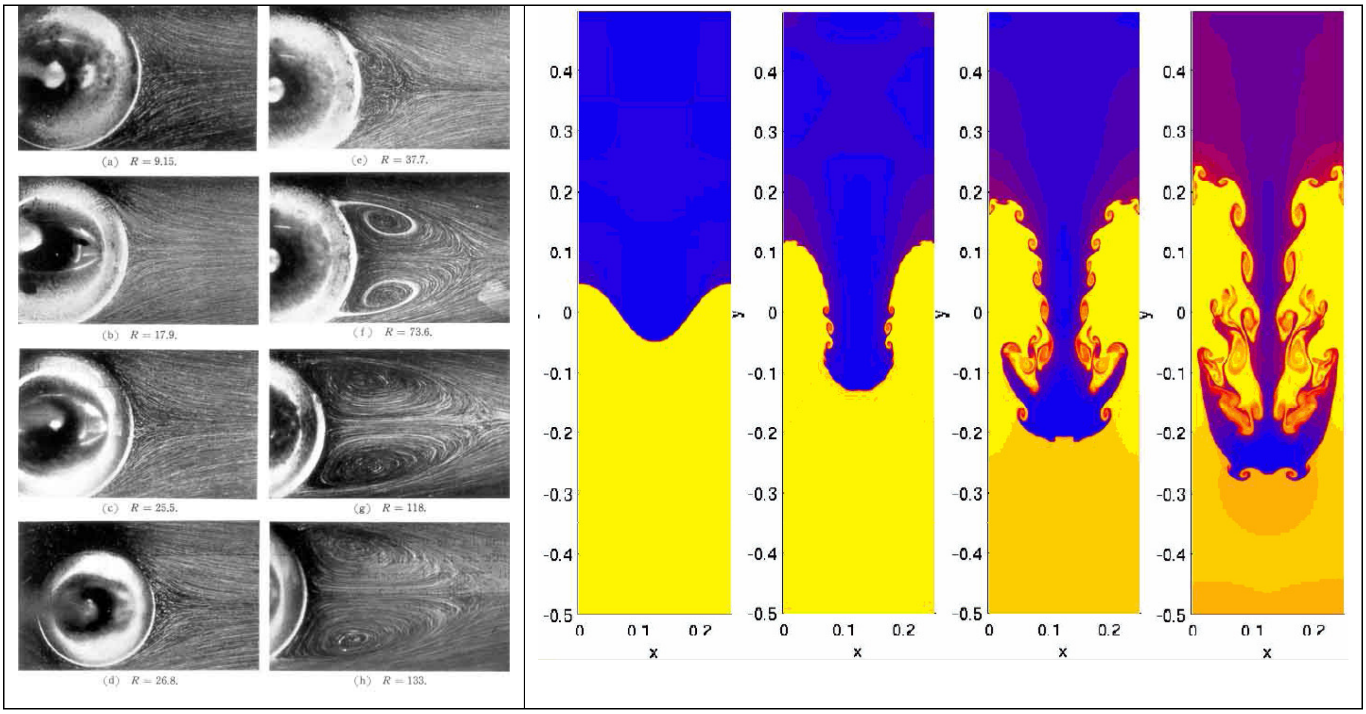
Mint azt láttuk, lamináris áramláskor az érintkező folyadékrétegek között állandó „impulzus diffúzió” történik (ez a dinamikus viszkozitás oka). Turbulens áramlásnál a rétegek „egymásba hatolása” a rétegek közötti „impulzus áramlásra” (konvekció) utal. Ennek kialakulását a következő képpen lehet elképzelni. Megfelelően kis sebességeknél a véletlenszerűen kialakuló (rétegek között átmenő) kis impulzus áramokat a viszkózus erők még tudják csillapítani. Egy bizonyos sebesség felett azonban ez a csillapítás már nem lesz elegendő és kialakul az „impulzus konvekció” .

Az áramlási képből arra lehet következtetni, hogy egy adott pontban a $\vec{v}(\vec{r},t)$ sebességvektor véletlenszerű mozgásokat végez. Ennek molekuláris oka kell, hogy legyen. Ugyanis a **NS** egyenlet **egzakt megoldásako**r kapott Hagen-Poiseuille törvény a tapasztalatok szerint egy bizonyos sebesség felett érvénytelenné válik a kialakuló turbulens mozgások miatt. Ez pedig csak úgy lehet, hogy a háttérben olyan effektusok vannak, amelyek a NS-egyenletben nincsenek benne. Ezek pedig csak a mikroszkopikus mozgások lehetnek.

A lamináris áramlás megszűnésekor eddig mindig „megfelelően kicsi”, „bizonyos nagyságú” sebességekről beszéltünk. Itt az ideje, hogy ezt számszerűen is megfogalmazhassuk állításainkat

Erre szolgál az ún. „Reynolds szám”.

A kísérleti áramlástan egyik igen fontos és hasznos eszköze e modellezés. Egy valódi áramlási kép kiszámítása néha igen bonyolult feladat. Hiába ismerjük a NS egyenletet, annak konkrét magoldásához a peremfeltételek is kellenek. A valóságban ezek igen bonyolult geometriájú felületek lehetnek. Ezért csak közelítő numerikus eljárások jöhetnek számításba. Ekkor azonban nem árt, ha a számításainkat ellenőrizni is tudjuk. Ez különösen fontos a mérnöki tervezésben. A megépítendő műtárgyak (hidak, épületek, gátrendszerek, repülőgépek, hajók, gépkocsik, stb…) esetén egy tervezési hiba végzetes lehet, emberileg és anyagilag egyaránt. Ha sikerül laborméretű maketteken méréseket végezni, akkor ez sok kudarctól mentheti meg a tervezőt. De mikor jó egy makett? Könnyen belátható, hogy itt nem egyszerű „geometriai kicsinyítésről” van szó. A modell „áramlási viszonyainak” kell ugyanolyannak lennie, mint a valóságos műtárgyé.



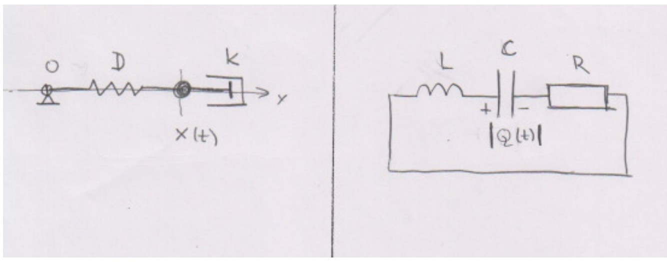
A növekvő áramlási sebesség során kialakuló turbulencia
7.ábra

Azokat a számokat, amelyeknek az egyezése esetén a modell és a valóságos objektum által produkált jelenség fizikailag hasonló, „hasonlósági számoknak” nevezzük. A mérnöki gyakorlat sok ilyet ismer, ezek mindegyike egy adott jelenség „hasonlóságát” jelenti. Mi most csak az áramlástani hasonlósági számmal az ún. Reynolds számmal fogunk megismerkedni.

A modellezés tudománya és a hasonlósági elvek mára már jól kiművelt műszaki szakterületek. Könyvtárnyi szakirodalommal, benne tengernyi kísérleti eredménnyel. Mi most csak a „józan fizikusi eszünkre” hallgatva mondunk el egy-két alapvető dolgot.

Abból az „egyszerűsített” tapasztalatból indulunk ki, hogy ha két fizikai jelenséget ugyanaz a dinamikai egyenlet (mozgásegyenlet) írja le, akkor a két jelenség fizikailag is hasonló tér-idő folyamatokat fog mutatni.

Jól ismert elemi fizikai megfigyelés például a mechanikai és az elektromos áramköri oszcillátor hasonlósága.



8.ábra

A csillapított mechanikai oszcillátor mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$$

A soros rezgőkörre (elektromágneses oszcillátor) a Kircchoff törvény alapján és az $I = \dot{Q}$ definíció felhasználásával adódik,hogy:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

Mind a kettő ugyanarra a közös alakra hozható:

$$\ddot{\xi} + 2\alpha\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$$

Ahol

$$\xi \to x \to Q$$

$$\alpha \to \frac{k}{2m} \to \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 \to \sqrt{\frac{D}{m}} \to \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ez azonban még nem „igazi” hasonlóság , mert a „ξ” egy mértékegységgel rendelkező mennyiség. És ezért csak kvalitatív összehasonlításra ad lehetőséget. Azaz, ha a két rendszerben a „$\xi(t)$” függvényre „ugyanaz” a számérték adódik, akkor az nem jelent semmit, hiszen az „5 méter” az „5 Coulombbal” összehasonlíthatatlan. Más lenne a helyzet, ha ξ egy puszta szám lenne.
Ez már „valódi” hasonlóságot jelentene. Próbálkozzunk meg ezzel!
A mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$$

A szokásos átalakítással

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Válasszunk „mértékegységet”, úgy, hogy

$t \to t_0 \cdot t$ ahol $[t] = 1$ és $[t_0] = [idő]$

$x \to x_0 \cdot \xi$ ahol $[\xi] = 1$ és $[x_0] = [hosszúság]$

(A „→” azt jelenti, hogy „legyen helyette”.) Ezzel a mozgásegyenlet így alakul

$$\frac{x_0}{t_0^2}\ddot{\xi} + \frac{x_0}{t_0}2\alpha\dot{\xi} + x_0\omega_0^2\xi = 0 \qquad \Big| \cdot \frac{t_0^2}{x_0}$$

$$\ddot{\xi} + t_0 2\alpha\dot{\xi} + t_0^2\omega_0^2\xi = 0$$

Válasszuk meg az időskálát úgy, hogy

$$t_0 = \frac{1}{\omega_0}$$

Így adódik, hogy

$$\ddot{\xi} + \frac{2\alpha}{\omega_0}\dot{\xi} + \xi = 0$$

Legyen

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{2\alpha} = \sqrt{\frac{Dm}{k^2}} .$$

És ezzel

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{Q}\dot{\xi} + \xi = 0$$

Ebben a mozgásegyenletben egyik mennyiségnek sincsen mértékegysége. Ez egy „abszolút" mozgásegyenlet. A „Q" egy „hasonlósági szám" neve az oszcillátor **„jósági tényezője"**.
Ugyanezt végig csinálhatjuk a soros rezgőkörre is. Eredményül az adódik, hogy

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{Q}\dot{\xi} + \xi = 0$$

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}$$

Tehát a két oszcillátor akkor hasonló, ha a jósági tényezőjük (ez egy szám) megegyezik.
Azaz úgy kell az áramköri és a mechanikai elemeket megválasztani, hogy teljesüljön a következő egyenlőség:

$$\frac{L}{R^2 C} = \frac{Dm}{k^2}$$

Ekkor elmondhatjuk, hogy az egyik oszcillátor, a másiknak a modellje.
Azért foglalkoztunk ezzel az egyszerű feladattal ilyen hosszan, mert teljesen hasonló módszert kell alkalmaznunk a sokkal bonyolultabb áramlástani esetekben is.

Tekintsük az összenyomhatatlan, reális(viszkózus) folyadék áramlását leíró NS egyenletet.

$$\rho\{\partial_t v_i + (v_j \partial_j) v_i\} = -\partial_i p + f_i + \eta \partial_k \partial_k v_i$$

Vezessük be következő mértékegységeket (ezek a „0" indexű mennyiségek)

$$\partial_t \to \frac{1}{t_0} \cdot \partial_t$$

$$\partial_i \to \frac{1}{x_0} \cdot \partial_i$$

$$\rho \to \rho_0 \cdot \rho$$

$$v_i \to v_0 \cdot v_i$$

$$\eta \to \eta_0 \cdot \eta$$

$$f_i \to f_0 \cdot f_i$$

$$p \to p_0 \cdot p$$

Látható, hogy az új dinamikai mennyiségek most számok. Ezeket beírva az NS egyenletbe adódik

$$\rho_0 \rho \left\{ \frac{v_0}{t_0} \partial_t v_i + \frac{v_0^2}{x_0} (v_j \partial_j) v_i \right\} = -\frac{p_0}{x_0} \partial_i p + f_0 f_i + \frac{\eta_0 v_0}{x_0^2} \eta \partial_k \partial_k v_i$$

Mivel a dinamikai mennyiségek most mind mértékegység nélküli számok ezért az összes tag együtthatójának a mértékegysége ([xx]) ugyanaz kell, hogy legyen. Azaz (balról jobbra sorrendben)

$$\left[\frac{\rho_0 v_0}{t_0}\right]=\left[\frac{\rho_0 v_0^2}{x_0}\right]=\left[\frac{p_0}{x_0}\right]=[f_0]=\left[\frac{\eta_0 v_0}{x_0^2}\right]$$

Ezekből is számokat kell csinálni. Ez többféleképp megtehető, hiszen az egyenlőséglánc bármelyik tagjával végigosztunk, akkor az eredmény „$[1]$” lesz.

Szorozzuk hát meg minden tagot $\left[\frac{x_0}{v_0^2\rho_0}\right]$ el

Ekkor az egyes együtthatókra, a megfelelő sorrendben a következőt kapjuk

$$\left[\frac{x_0}{v_0 t_0}\right]=[1]=\left[\frac{p_0}{v_0^2\rho_0}\right]=\left[\frac{f_0 x_0}{v_0^2\rho_0}\right]=\left[\frac{\eta_0}{\rho_0 x_0 v_0}\right]$$

Természetesen itt csak a mértékegységek egyeznek meg., de a számértékek nem. Minden tagot elneveztek és egy jelet is adtak nekik. Ezek a hasonlósági számok. Ezek megnevezése és jele a következő:

Strouhal szám	$\leftrightarrow$	St
Euler szám	$\leftrightarrow$	Eu
Froude szám	$\leftrightarrow$	Fr
Reynolds szám	$\leftrightarrow$	Ry

Ezek után, ha a HS egyenletet is beszorozzuk a $\left[\frac{x_0}{v_0^2\rho_0}\right]$ kifejezéssel, akkor „hasonlósági számok” és mértékegység nélküli dinamikai mennyiségek fognak benne szerepelni. Kapjuk tehát, hogy

$$\rho\left\{\frac{1}{\mathrm{St}}\cdot\partial_t v_i+\left(v_j\partial_j\right)v_i\right\}=-\frac{1}{\mathrm{Eu}}\cdot\partial_i p+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\cdot f_i+\frac{1}{\mathrm{Re}}\eta\partial_k\partial_k v_i$$

Két áramlás mármost akkor hasonló, ha minden hasonlósági számuk megegyezik. Ekkor ugyanis azonos matematikai egyenleteket kapunk mérték egységek nélkül.

A gyakorlatban azonban nem kell minden hasonlósági számnak megegyeznie. Elég, ha csak a vizsgált effektus szempontjából hasonló a modell a valódi objektummal. A lamináris, turbulens áramlás kialakulása a Reynolds szám nagyságától függ.. A tapasztalatok szerint, egyenes csőben áramló reális folyadék esetén az áramlás lamináris lesz, ha

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho_0 x_0 v_0}{\eta_0} < \text{(kb) } 2300$$

A Reynolds számnak szemléletes jelentése is van

Vegyünk egy kis A_0 keresztmetszetű, „$v_0 t_0$” hosszúságú, „v_0” sebességgel áramló folyadékréteg darabot

Ekkor a kiszemelt folyadékdarab impulzusa

$$\rho_0\left(A_0 v_0 t_0\right)v_0$$

Ha ezt t_0 idő alatt meg akarnánk állítani, akkor ehhez

$$\rho_0\left(A_0 v_0\right)v_0$$

Nagyságú erő kellene, amely pedig egy „nyomófeszültséget” („felület egységre eső erőt”) jelent

$$F_t = \rho_0 v_0 v_0$$

A jól ismert Newton-féle viszkozítási törvény szerint a folyadékrétegek közötti csúszó feszültség

$$\tau = -\eta \frac{dv}{d\xi}$$

Ahol a „ξ” a „v” áramlási sebességre merőleges irányt jelenti. Erre pedig a „dimenziótlanítás” után kapjuk

$$\tau = -\eta \frac{dv}{d\xi} \frac{\eta_0 v_0}{x_0} = \tau \tau_0$$

Azaz

$$\tau_0 = \frac{\eta_0 v_0}{x_0}$$

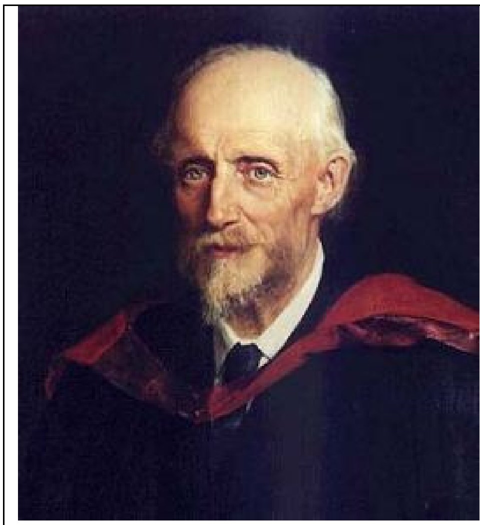
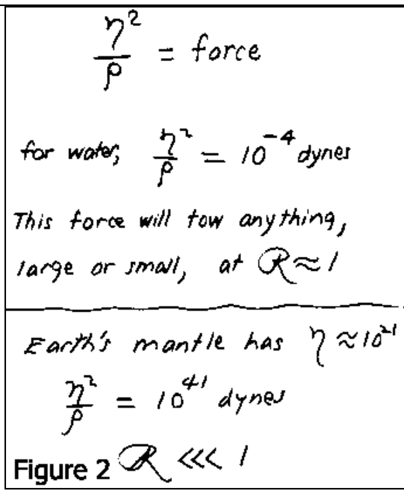
Képezve a két fajta feszültség hányadosát, azt kapjuk, hogy

$$\frac{F_t}{\tau_0} = \frac{\rho_0 x_0 v_0}{\eta_0} = \mathrm{Re}$$

Tehát e Reynolds szám az áramlásból adódó tehetetlenségi erő, és az impulzusdiffúzióból adódó nyíró erő hányadosa. Ha a Reyolds szám nagy, akkor relative kicsi a súrlódás az áramláshoz képest.
Az ideális folyadék Reynolds száma triviálisan végtelen nagy

$$[\mathrm{Re}]_{\text{ideális}} = \infty$$

Ez azt jelenti, hogy az áramlás minden sebesség értéknél lamináris lesz.

	
Osborne REYNOLDS (1842-1912)	

Végezetül álljon itt egy képtárlat a turbulencia változatos világából

Régi kőzetben a hajdani turbulencia nyoma

Lávafolyam lamináris áramlása turbulens részekkel

Kihűlt (megkövesedett) láva a lamináris és turbulens áramlás jeleivel.

Turbulens gázáramlás a felhőkben

Repülőgép által keltett turbulens légáramlás

A Jupiter légkörében lévő jellegzetes óriás turbulencia („Jupiter szeme")

Turbulencia az Univerzumban lévő csillagközi por és gázködökben

Fantázia teremtette turbulencia mint az „zaklatott lelki állapot" kifejezője (Van Gogh).