

Matematikai alapismeretek

Fizika A2E, 1. feladatsor

1. feladat Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

- Mekkora az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok hossza?
- Milyen szöget zár be egymással \mathbf{a} és \mathbf{b} ?
- Mekkora az \mathbf{a} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített paralelogramma területe?
- Mekkora a \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített háromszög területe?
- Mekkora a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata?

2. feladat Adott két vektor: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Bontsa fel \mathbf{a} -t \mathbf{b} -vel párhuzamos és rá merőleges komponensekre! Hegyes- vagy tompaszöget zár be egymással a két vektor?

3. feladat Egy origó középpontú, $R = 10$ cm sugarú, $m = 1$ kg tömegű homogén tömegeloszlású gömbre két erő hat: $\mathbf{F}_1 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j})$ N, amelynek a támadáspontja $0,1\mathbf{k}$ m, és $\mathbf{F}_2 = (-2\mathbf{i} - \mathbf{j})$ N, amelynek a támadáspontja $-0,1\mathbf{j}$ m. Mi lesz a gömb szöggyorsulásvektora? $t = 1$ s múlva milyen sebességű lesz a $0,1\mathbf{k}$ m helyvektorú pontja?

4. feladat Egy pontszerű test mozgását az $r(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$ függvények írják le gömbi koordinátarendszerben. Hogyan néz ki a test sebessége és gyorsulása Descartes-koordinátákkal megadva?

5. feladat Határozzuk meg az

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

integrál értékét síkbeli polárkoordináta-rendszer segítségével, felhasználva, hogy

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy .$$

6. feladat Egy felület paraméteres megadása hengerkoordinátákban a következő:

$$\begin{aligned}\varrho(s,t) &= R + r \cos(t) , \\ z(s,t) &= r \sin(t) , \\ \varphi(s,t) &= s ,\end{aligned}$$

ahol s és t is a $[0, \pi)$ intervallumot futja végig. Mi ez az alakzat? Hogyan néz ki a paraméteres megadás Descartes-koordinátákban?

7. feladat Egy origó középpontú homogén fémkockában a hőmérséklet egy adott pillanatban a következő módon függ a helytől:

$$T(x,y,z) = T_0 + T_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(x+y)\right) \cdot e^{\beta z} .$$

Milyen irányú a hőáramlás az origóban, illetve a tér többi pontjában ebben a pillanatban?

8. feladat Egy tömegpontra a helyétől függő $\mathbf{F}(x,y,z) = a(x\mathbf{i} + y\mathbf{k}) + bz^2\mathbf{j}$ erő hat. Mekkora munkát végez ez az erőter, miközben a tömegpont $\mathbf{r}(t) = ct\mathbf{i} + dt^2\mathbf{j}$ szerint mozog $t = 0$ időtől $t = T$ -ig?

9. feladat Egy R sugarú henger alakú csőben folyadék áramlik, sebessége mindenhol párhuzamos a cső tengelyével, nagysága csak a középvonaltól mért r távolságtól függ $v(r) = C \cdot (R^2 - r^2)$ módon. Mennyi folyadék áramlik át a cső keresztmetszetén t idő alatt?

10. feladat Egy origó középpontú, R sugarú golyó z -ben lineárisan változó sűrűségű anyagból készült: $\varrho(x,y,z) = \varrho_0 + \alpha z$. Mennyi a golyó tömege? Mekkora a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?