

FTQFT

Jakovac Antal

start: January 14, 2010; last update: May 13, 2011

Contents

1	Bevezetés	3
2	Klasszikus térelmélet Lagrange formalizmusa	3
2.1	Szimmetria és megmaradás	5
2.2	Energia-impulzus tenzor	6
3	Kvantummechanika	7
3.1	Hermitikus operátorok	7
3.2	Unitér operátorok	8
3.3	Térelméletek kvantálása	8
4	A kezdeti érték probléma	10
4.1	Propagátorok	13
4.2	Generátor funkcionál	14
4.3	Speciális kezdőfeltételek	14
5	Egyensúly	15
5.1	Vákuum várható érték	16
5.2	Kémiai potenciál	16
5.3	Propagátorok	17
5.4	Szabad elméletek	20
5.4.1	Bozonok	20
5.4.2	Fermionok	23
5.5	Perturbációs számítás	25
5.5.1	Matsubara elmélet	26
5.5.2	Valós idejű formalizmus	27
5.6	Φ^4 elmélet	27
5.6.1	\hbar -kifejtés	29
5.6.2	1PI diagrammok, sajátenergia	29
5.6.3	1PI diagrammok, vertexfüggvények	31
5.7	1PI diagrammok Φ^4 elméletben	31
5.7.1	Tadpole diagram	31
5.7.2	Bubble (buborék) diagram	34
5.8	Divergenciák a perturbációs számításban	38
6	A perturbációs sor átrendezései: renormálás és felösszegzés	39
6.1	Overall divergenciák	42
6.2	Aldivergenciák	43
6.3	Perturbációs sémák viszonya	44
6.4	Skálaváltás nulla hőmérsékleten	45
6.5	Hőmérsékletfüggő tömeg és csatolás	46
6.6	2PI felösszegzés	48

6.7	2PI egyenletek nemegyensúlyi esetben	51
6.8	Új szabadsági fokok	54

1 Bevezetés

A speci témája a véges hőmérsékletű és nemegyensúlyi kvantumtérelméletek vizsgálata.

Előszöris néhány könyv, illetve cikk, amely hasznos lehet:

- M. Le Bellac, Thermal Field Theory (Cambridge University Press, 1996)
- J.I. Kapusta and C. Gale, Finite-temperature Field Theory, Principles and Applications (Cambridge University Press 2006)
- N.P. Landsmann and Ch.G. van Weert, Real - and imaginary-time field theory at finite temperature and density, Phys. Rep. 145 (1987) 141-249.
- I. Montvay, G. Münster, Quantum Fields on a Lattice (Cambridge Univ. Press 1994.)

Ezután röviden tekintünk át azokat az eszközöket, amelyeket használni fogunk. Ahogyan a cím is sejteti, térelméletekkel fogunk foglalkozni. Ennek fő oka az, hogy relativisztikus, kauzális elméleteknél nem engedhetünk meg távolhatást, legalábbis igen bonyolult lenne ennek megfogalmazása. Két távoli test egymásra hatása ekkor – mint ezt az elektrodinamikában is láttuk – csak úgy képzelhető el, hogy az egyik test *lokálisan* létrehoz egy mezőt (teret), ez valamilyen dinamikával kiterjed, és végül a másik test megérzi a hatását valamilyen erő formájában.

def.: Mező: $A : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}$, valamely alaptérről (lehet a 3D tér vagy a Minkowski-tér) valamilyen vektortérbe képező függvény; valamely alkalmas koordinátázással komponensei: $A_a(x) \equiv A_a(t, \mathbf{x})$.

A vektortér belső szerkezetét jellemző mennyiségek lehetnek a spin ill. Lorentz-index, szín, íz, stb. Megtehetjük azt is, hogy külön kiemeljük a (legfontosabb) időargumentumot, és a mezőt $A_i(t)$ módon jelöljük (*multi-index*), ahol most az indexbe beleértjük a térargumentumot is. Jelölésként fogadjuk el, hogy ismétlődő indexpárra (hacsak expliciten nincs megadva) összegzést végzünk el.

A mezők, bármely különbözőnek tűnjenek is, végülis csak egy általánosított mechanikai rendszernek tekinthetők. Ehhez osszuk fel a teret kis cellákra, \mathbf{a} rácsállandóval, középpontjukat jelölje \mathbf{x}_n , és vesszük a cella középpontjának értékét: $A_a(t, \mathbf{x}_n)$. A multi-index jelölésben ez a magától értetődő $A_i(t)$ jelöléssel, ahol most az i index diszkrét értékeket vesz fel. Ezzel egy véges sok szabadsági fokú rendszert kapunk, amelyet a mechanika elvei szerint építünk fel.

A mezők (terek) leírására a Lagrange formalizmust fogjuk használni. Ennek oka az, hogy a relativitáselmélet összeköti a teret az idővel, vagyis olyan formalizmus lesz a legmegfelelőbb, ahol ez a szimmetria fennáll. Először tekintünk át a térelméletek Lagrange formalizmusát.

2 Klasszikus térelmélet Lagrange formalizmusa

Klasszikus mechanikában egy rendszer leírására alkalmazhatjuk a Lagrange formalizmust. Ekkor általánosított q_i koordinátákat vezetünk be, ezek időfejlődésük során valamilyen pályát követnek $q_i(t)$. A megvalósuló pálya kiszámítását variációs elvvel végezhetjük el. Ehhez megadjuk a pályákhoz tartozó hatás-funkcionált $S[q]$, ennek a pálya variációjára kapott szélsőértéke adja meg a kívánt eredményt

$$\left. \frac{\delta S}{\delta q_i} \right|_{\text{fizikai mozg.}} = 0, \quad q_i(t_0) = q_i^{(0)}, \quad q_i(t_1) = q_i^{(1)}. \quad (1)$$

A kauzalitás fenntartása érdekében a hatás-funkcionált időben lokális hatások integráljaként írjuk fel, amely csak a pályától és annak első időderiváltjától függ

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\dot{q}(t), q(t)), \quad (2)$$

L neve Lagrange-függvény. A hatás szélsőértékének követelménye a Lagrange-függvényre $q \rightarrow q + \delta q$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt [L(\dot{q} + \delta\dot{q}, q + \delta q) - L(\dot{q}, q)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\delta\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} \right] = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta q \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} \right] = 0, \quad (3)$$

ahol az utolsó egyenletnél felhasználtuk, hogy $\delta q = 0$ a végpontokban. Mivel ez minden variációra igaz, így kapjuk a

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4)$$

Euler-Lagrange egyenletet.

A Lagrange-függvény \dot{q}_i szerinti Legendre-transzformációjával kapjuk a Hamilton-függvényt:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H(p, q) = p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}, q), \quad (5)$$

ahol a jobb oldalon $\dot{q}_i(p, q)$ módon kezelendő. A Hamilton-függvényből a mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \quad (6)$$

A Hamilton- és Lagrange formalizmus egymással egyenértékű.

Térelméletek tárgyalásánál a fentihez hasonlóan általánosított koordinátákkal felírt Lagrange-függvényeket tekintünk, most tehát $q_i \rightarrow A_i$ (az egyszerűség kedvéért most elhagyjuk a belső térhez tartozó indexeket). Ezzel $L(\dot{A}, A, t)$ függvény, ahol $i = 1 \dots N$. Lokálisnak nevezzük a sok szabadsági fokú rendszert, ha A_i csak a térbeli szomszédaival hat kölcsön, vagyis a Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \sum_{\langle i, j \rangle} L_i^{(2)}(A_i, A_j, t) + \sum_i L_i^{(1)}(\dot{A}_i, A_i, t), \quad (7)$$

ahol $\langle i, j \rangle \equiv$ szomszédok, és $i > j$ (hogy ne számoljunk duplán). Ha i, j térbeli cellákat jelöl, mint előbb, akkor írhatjuk a térbeli felosztást finomítva

$$A_j - A_i = \mathbf{a} \nabla A_i + \mathcal{O}(\mathbf{a}^2). \quad (8)$$

A magasabbrendű tagokat elhagyva írható $L_2(A_i, \nabla A_i, t)$. A teljes Lagrange-függvény tehát

$$L = \sum_i L_i(\partial_\mu A_i, A_i, t) \quad (9)$$

alakba írható, ahol összefoglaló jelöléssel bevezetjük a négyes deriváltat: $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$. Ez természetesen nem jelent még automatikusan relativisztikus invarianciát! Azonban a relativitáselméletet szem előtt tartva bevezetjük az alsó- és felső indexes mennyiségeket, melyek között $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ metrikus tenzor visz át.

A felosztás finomításával a szummák integrálokká írhatók át: $\sum_i F_i$ esetében bevezetjük az $F(\mathbf{x}) = F_i$, $\mathbf{x} \in \delta V_i$ lépcsőfüggvényt, amelyre

$$\sum_i F_i = \frac{1}{\delta V} \int d^3 \mathbf{x} F(\mathbf{x}) \equiv \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x})}{\delta V} \quad (10)$$

sűrűség. Így lokális térelméleteket jellemző Lagrange-függvény felírható mint

$$L = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(A(t, \mathbf{x}), \partial_\mu A(t, \mathbf{x}), t, \mathbf{x}) \quad (11)$$

Lagrange sűrűség integrálja $\Rightarrow \mathcal{L}$ csak *első deriváltakat* tartalmaz.

A hatás alakja

$$S = \int dt L = \int d^4 x \mathcal{L}(A(x), \partial_\mu A(x), x) \quad (12)$$

t -ben és \mathbf{x} -ben teljesen szimmetrikus alakba írható.

A mozgásegyenletekhez az Euler-Lagrange egyenletet használjuk. Most azonban egyszerűbb a legkisebb hatás elvét direktben felírni:

$$\begin{aligned}\delta S[A] &= \int d^4x \left[\mathcal{L}(\partial_\mu A + \partial_\mu \delta A, A + \delta A, x) - \mathcal{L}(\partial_\mu A, A, x) \right] = \int d^4x \left[\delta A_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} + \partial_\mu A_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_i)} \right] = \\ &= \int d^4x \delta A_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_i)} \right],\end{aligned}\quad (13)$$

ahol az utolsó lépésnél parciálisan integráltunk, és eldobtuk a végtelenben fellépő felületi tagokat. A hatás szélsőértéke ott van, ahol $\delta A = 0$ minden variációra. Ekkor az integrálban δA együtthatója el kell tűnjön

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_i)} = 0, \quad (14)$$

megegyezik a másik eredménnyel.

2.1 Szimmetria és megmaradás

Míg mechanikában egy Q mennyiség megmaradása azt jelentette, hogy $Q(t) = Q(0)$, egy ϱ mező esetén a lokális mennyiségek nem maradnak meg, mert más helyre átmehetnek. Mégis megmaradásról beszélhetünk olyan értelemben, hogy egy tetszőleges V térfogatban

$$\int_V d^3\mathbf{x} \varrho(t + dt, \mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{x} \varrho(t, \mathbf{x}) + (\text{falon távozó } \varrho).$$

Bevezetve $j^\mu = (\varrho, \mathbf{j})$ jelölést, ahol \mathbf{j} a ϱ -hoz tartozó áram, $V \rightarrow 0$ limeszben a következő mérlegegyenlethez jutunk:

$$\dot{\varrho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (15)$$

j^μ neve megmaradó áram. A ténylegesen megmaradó mennyiség $Q = \int dV j^0$, a teljes térre integrálva, hiszen

$$\dot{Q} = \int dV \partial_0 j^0 = - \int dV \operatorname{div} \mathbf{j} = \oint_\infty d\mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (16)$$

mert a végtelenben nincsenek áramok.

A Lagrange-formalizmus erőssége, hogy a szimmetriák jól kezelhetők vele. Tekintsünk egy transzformációt a A mezőn:

$$R(A)(x) = RA(R^{-1}x). \quad (17)$$

Egy transzformáció akkor szimmetria, ha a transzformált mezőhöz az eredetivel azonos hatásfüggvény tartozik: $S[A] = S[R(A)]$. Ekkor a transzformált mező körüli variációra igaz

$$\delta S[R(A)] = S[R(A) + \delta A] - S[R(A)] = S[R(A + \bar{\delta}A)] - S[R(A)] = S[A + \bar{\delta}A] - S[A] = \delta S \bar{\delta}A, \quad (18)$$

itt $R(A + \bar{\delta}A) - R(A) = \delta A$ módon vezettük be $\bar{\delta}A$ -t. Ha tehát A kielégítette a mozgásegyenleteket, akkor $\delta S = 0$, ekkor viszont $\delta S[R(A)] = 0$ is igaz, azaz $R(A)$ is kielégíti a mozgásegyenleteket. Vagyis a szimmetria megvalósuló mozgást megvalósuló mozgásba visz át.

Egy térelméleti rendszer relativisztikus invarianciája tehát azt követeli meg, hogy a Lagrange-függvény relativisztikusan invariáns legyen. Praktikusan ez azt jelenti, hogy minden négyesvektor csak egy másik négyesvektorral összeajtva szerepelhet \mathcal{L} -ben.

T?tel: (Noether-tétel) Minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó áram.

Bizony?t?s.: Jelöljük a folytonos transzformációt R_τ -val. $R_0 \equiv 1$ az egységtranszformáció legyen. Infinitesimalis transzformációnál ($R_{\delta\tau}$) a változás lineáris $\delta\tau$ -ban. Ezért a mezőkön hatva felírható:

$$R_{\delta\tau} : A(x) \mapsto A'(x) = A(x) + \delta A(x) = A(x) + \delta\tau \Delta A(x). \quad (19)$$

Ez a transzformáció a $A(x)$ "pálya" variációját adja. Mivel a hatás a valódi mozgások körüli kis variációkra (első rendben) nem változik, így *minden* transzformációra igaz, hogy

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \tau} \right|_{A_0} = 0, \quad (20)$$

ahol A_0 a mozgásegyenlet megoldása.

Most vegyünk szimmetriatranszformációt. Erre $S[A'] = S[A]$, így a fenti egyenlőség nemcsak a mozgásegyenlet megoldása mentén, hanem mindenhol igaz. Vegyünk azonban olyan transzformációt, amelyet a szimmetriatranszformációból kapunk úgy, hogy $\delta\tau$ -t *helyfüggetlenné* tesszük! $\Rightarrow \delta A(x) = \delta\tau(x)\Delta A(x)$.

Erre változni fog a hatás, azonban azt is tudjuk, hogy ha $\delta\tau(x) \rightarrow \delta\tau$ homogén limeszben a változás eltűnik. Emiatt δS arányos lesz $\delta\tau$ deriváltjaival. Parciális integrálásokkal azonban minden $\delta\tau$ -ra ható derivált áthárítható az együtthatójára, míg végül az első derivált marad

$$\delta S = - \int d^4x K^\mu(x) \partial_\mu \delta\tau(x) = \int d^4x \partial_\mu K^\mu(x) \delta\tau(x). \quad (21)$$

Ezt összevetve (20) egyenlettel:

$$\frac{\delta S}{\delta\tau(x)} = \partial_\mu K^\mu(x) \Rightarrow \left. \partial_\mu K^\mu(x) \right|_{A_0} = 0, \quad (22)$$

vagyis K^μ megmaradó áram.

2.2 Energia-impulzus tenzor

Speciális példaként tekintsük a téridő eltolásokat: $x \rightarrow x + a$, ahol $a = \text{const}$, valamint $R_{\mathbf{V}} = 1$. Mezőre hatva $\Phi'(x + a) = \Phi(x) \Rightarrow \Phi'(x) = \Phi(x - a)$.

Mikor szimmetria? Ha $S[\Phi] = S[\Phi']$! Válasszuk az integrálási változónak x' -t:

$$S[A'] = \int d^4x' \mathcal{L}(A'(x'), \partial'_\mu A'(x'), x') = \int d^4x \mathcal{L}(A(x), \partial_\mu A(x), x + a). \quad (23)$$

Ez akkor egyezik $S[\Phi]$ -vel $\forall \Phi$ -re, ha \mathcal{L} nem függ expliciten x -től.

Mi a megmaradó mennyiség? Ehhez $x' = x + a(x)$, és vizsgáljuk $S[A']$ -t:

$$S[A'] = \int d^4x' \mathcal{L}(A'(x'), \partial'_\mu A'(x'), x') = \int d^4x \det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathcal{L}(A(x), \partial'_\mu A(x)). \quad (24)$$

Ehhez:

$$\partial'_\mu A(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu A(x). \quad (25)$$

A derivált mátrix $x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$ illetve $x^\mu \approx x'^\mu - a^\mu(x')$ alapján:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu a^\mu \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\nu^\mu - \partial_\mu a^\nu + \mathcal{O}(a^2). \quad (26)$$

A determinánshoz

$$\begin{vmatrix} 1 + \partial_0 a^0 & \partial_1 a^0 & \dots \\ \partial_0 a^1 & 1 + \partial_1 a^1 & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = (1 + \partial_0 a^0)(1 + \partial_1 a^1) \dots + \mathcal{O}(a^2) = 1 + \partial_\mu a^\mu + \mathcal{O}(a^2). \quad (27)$$

Végül tehát

$$S[A'] = \int d^4x (1 + \partial_\mu a^\mu) \mathcal{L}(A(x), \partial_\mu A(x) - \partial_\mu a^\nu \partial_\nu A(x)) = S[A] + \int d^4x \left[\partial_\mu a^\mu \mathcal{L} - \partial_\mu a^\nu \partial_\nu A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A)} \right]. \quad (28)$$

Valóban csak ∂a -tól függ! A korábbiak alapján a megmaradó áram

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu a^\nu T^\mu{}_\nu \Rightarrow T_{\mu\nu} = \partial_\nu A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A)} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \Rightarrow \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (29)$$

vagyis minden μ -re van egy megmaradó áram \Rightarrow energia-impulzus tenzor. Relativisztikusan invariáns elméletekben szimmetrikussá tehető.

Most a megmaradó mennyiségeket energiának illetve impulzusnak hívjuk:

$$E = \int d^3\mathbf{x} T^{00}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{P}^i = \int d^3\mathbf{x} T^{0i}(t, \mathbf{x}). \quad (30)$$

Az impulzus alternatív alakja, felhasználva, hogy a kanonikusan konjugált impulzus mező

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}(x)} = \Pi(x) \Rightarrow \mathbf{P}^i = \int d^3\mathbf{x} \Pi(x) \partial^i A(x). \quad (31)$$

3 Kvantummechanika

A kvantummechanikában a rendszer állapotát egy \mathcal{H} komplex Hilbert tér egy normálható eleme $|A\rangle \in \mathcal{H}$ adja meg. Szokásosan a norma 1, azaz $\langle A|A\rangle = 1$. A $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operátorok között két csoport jelentős:

3.1 Hermitikus operátorok

Hermitikus operátorokra $H^\dagger = H$. Ezek jobb és bal oldali sajátvektora megegyezik, sajátértékeik valósak:

$$H |h_i\rangle = h_i |h_i\rangle, \quad h_i^* = h_i. \quad (32)$$

Hermitikus operátorok egy mérést, más szóval megfigyelhető mennyiségeket reprezentálnak, ekkor sajátértékeik a megfigyelhető mennyiség mérésének eredményét jelentik. Ha a rendszer állapota $|\Psi\rangle$, akkor a h_i mérési eredmény megvalósulásának valószínűsége $|\langle h_i|\Psi\rangle|^2$. A mérés eredményének várható értéke

$$\langle H \rangle = \sum_i h_i |\langle h_i|\Psi\rangle|^2 = \langle \Psi | H | \Psi \rangle. \quad (33)$$

A mérés után a rendszer a mért sajátállapotba kerül.

Amennyiben több független rendszer méréseit akarjuk átlagolni, esetleg időátlagot akarunk képezni, akkor az eredmény már nem írható fel a fenti alakban. Ezért érdemesebb bevezetni a $\hat{\rho}$ sűrűségmátrix fogalmát, amivel

$$\langle H \rangle = \text{Tr } \hat{\rho} H, \quad \langle 1 \rangle = 1 = \text{Tr } \hat{\rho}. \quad (34)$$

Egyetlen kvantumállapot esetén $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$. A linearitás miatt több független részrendszerre való összegzés a $\hat{\rho}$ -k összegzését jelenti, vagyis stabil alakot kapunk.

A klasszikus mechanikához való kapcsolathoz a klasszikus mérést, amelyet a mért értékkel reprezentálunk, kicseréljük a hozzá tartozó mérési utasítással, amelyet az operátor reprezentál. Fontos operátor kvantummechanikában a helymérés operátora \hat{q} , amelynek folytonos spektruma van. Ezzel tudunk pontot (tömegpontot) értelmezni, és pályáról beszélni.

Általános elv, hogy a megfigyelhető mennyiségek \hat{q} és \hat{p} -vel való kifejezése meg kell egyezzen a klasszikus képlettel, azonban rendezési bizonytalanságok lehetnek.

Speciális szerepet tölt be a hely \hat{q} és impulzus \hat{p} operátora. Ezek folytonos spektrummal rendelkeznek, azonban egyszerre nem mérhetők: $\Delta p \Delta x \geq \hbar$. Operátorokra megfogalmazva

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i. \quad (35)$$

Ezek az operátorok "bázist" képeznek a fizikai megfigyelhető operátorok között, azaz minden megfigyelhető mennyiség \hat{q} és \hat{p} hermitikus függvénye. Ekkor a fenti kvantálási feltétel rögzíti bármely két megfigyelhető mennyiség kommutátorát.

3.2 Unitér operátorok

A rendszer állapotának megváltoztatását kétféle módon írhatjuk le. Schrödinger képben az állapotot transzformáljuk $|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$ lineáris operátor. Ennek egységnyi normájú elemet egységnyi normájú elembe kell képeznie, így $U^\dagger U = 1$, azaz U unitér operátor kell legyen. A Heisenberg képben az állapot marad, viszont az operátorokat transzformáljuk. A várható érték változatlansága érdekében

$$\langle \Psi | \hat{O}' | \eta \rangle = \langle \Psi' | \hat{O} | \eta' \rangle = \langle \Psi | U^\dagger \hat{O} U | \eta \rangle \Rightarrow \hat{O}' = U^\dagger \hat{O} U. \quad (36)$$

Fontos speciális esetet jelentenek azok az operátorok, amelyek egy (vagy több) folytonos paramétertől függenek $U(\lambda)$, és csoportot alkotnak. Egy paraméteres csoport pl. az állapot eltolása, vagy adott tengely körüli elforgatása, több paraméteres csoport az általános forgatás. A csoport tulajdonság azt jelenti, hogy $\forall \lambda_1, \lambda_2$ paraméterre $\exists \lambda_3$ paraméter, hogy $U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_3)$. A standard paraméterezés:

$$U(\lambda) = e^{-iT^a \lambda_a}. \quad (37)$$

Infinitezimális trf. hatására a hullámfüggvény ill. az operátorok trf-ja:

$$d|\Psi\rangle = -iT|\Psi\rangle d\lambda, \quad \text{illetve} \quad d\hat{O} = i[T, \hat{O}]d\lambda. \quad (38)$$

Az infinitezimális generátor, mivel hermitikus operátor, fizikai megfigyelhető mennyiséget reprezentál. Az egy paraméteres csoportok hatására ennek az operátornak a transzformációja:

$$T(\lambda) = U^\dagger(\lambda)TU(\lambda) = e^{iT\lambda}Te^{-iT\lambda} = T. \quad (39)$$

Azaz T megmarad a transzformáció során. Ezzel a következő fontos összefüggésre mutattunk rá:

$$\text{trf. generátora} \equiv \text{trf. során megmaradó mennyiség.}$$

Az idő-eltolás példája az egy paraméteres transzformációknak. Ekkor $\exists H$ az infinitezimális idő-eltolás generátora, ezzel $U(t) = e^{-iHt}$ a véges időeltolás operátora. Az állapotok transzformációja

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi\rangle = e^{-iHt}|\Psi\rangle \Rightarrow i\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad (40)$$

ez a Schrödinger egyenlet. Az operátorokra érvényes egyenlet

$$\hat{O}(t) = e^{iHt}\hat{O}(0)e^{-iHt} \Rightarrow \partial_t\hat{O} = i[H, \hat{O}]. \quad (41)$$

A generátor, H idő-független. Ezt *definiáljuk* energiának.

def.: Energia az időeltolás generátora (és egyben az időeltolás során megmaradó mennyiség).

A tér-eltolás generátorát p -vel jelölve a véges eltolás operátora e^{-ipx} . A hely-operátor infinitezimális megváltozása éppen dx kell legyen, azaz

$$dq = i[p, q]dx = dx \Rightarrow [q, p] = i. \quad (42)$$

A tér-eltolás generátora tehát az impulzus; egy bonyolult elméletnél, ahol nem tudjuk, mi az impulzus:

def.: Az impulzus a tér-eltolás generátora (és egyben az eltolás során megmaradó mennyiség).

3.3 Térelméletek kvantálása

Láttuk: diszkretizált térelmélet \equiv sok szabadsági fokú mechanikai rendszer, ahol $A(t, \mathbf{x}_i) \rightarrow q_i(t)$ és $\Pi(t, \mathbf{x}_i) = p_i(t)$. Mechanikai rendszer kvantálásakor $q \rightarrow \hat{q}$ és $p \rightarrow \hat{p}$ operátorok lettek \Rightarrow Térelméletnél $A(t, \mathbf{x}) \rightarrow \hat{A}(t, \mathbf{x})$ operátor.

Láttuk: kvantummechanikai rendszer kvantálása onnan jön, hogy az impulzus (\equiv tér-eltolás invariancia esetén a megmaradó mennyiség) generálja a tér-eltolást. A tér-operátor \hat{q}_i megváltozása tér-eltolás hatására

$\delta\hat{q}_i = dx\mathbf{1}$, arányos az egységmátrixsal. Ezért, ha az impulzus éppen a kanonikusan konjugált impulzus, akkor $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}\mathbf{1}$.

Térelméleteknél ugyanígy megköveteljük, hogy az impulzus (\equiv tér-eltolás invariancia esetén a megmaradó mennyiség) generálja a tér-eltolást. Az impulzus kifejezése (31) képletből jön. Másrészt infinitezimális tér-eltolás hatására

$$A'(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x} - d\mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) - d\mathbf{x}^i \partial_i A(t, \mathbf{x}) + \dots \Rightarrow \delta A = -d\mathbf{x}^i \partial_i A(t, \mathbf{x}). \quad (43)$$

Ezt generálja az impulzus, a (38) képlet alapján

$$\delta A(t, \mathbf{x}) = -d\mathbf{x}^i \partial_i A(t, \mathbf{x}) = i[\mathbf{P}^i(t), A(t, \mathbf{x})]d\mathbf{x}^i = i \int d^3\mathbf{y} i[\Pi(t, \mathbf{y})\partial_i A(t, \mathbf{y}), A(t, \mathbf{x})]d\mathbf{x}^i. \quad (44)$$

Ezt két konzisztens kvantálás tudja teljesíteni. Mivel

$$[AB, C] = ABC - CAB = A(BC + \alpha CB) - (\alpha AC + CA)B = \begin{cases} A[B, C] + [A, C]B, & \text{ha } \alpha = -1 \\ A\{B, C\} - \{A, C\}B, & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases} \quad (45)$$

Ezért lehetséges kommutátorral vagy antikommutátorral kvantálni:

$$\begin{aligned} [A(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & [A(t, \mathbf{x}), A(t, \mathbf{y})] &= 0, & \text{vagy} \\ \{A(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})\} &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & \{A(t, \mathbf{x}), A(t, \mathbf{y})\} &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Az előbbieket nevezzük bozonoknak, az utóbbiakat fermionoknak. Fontos, hogy a kvantálás egy idejű operátorokra vonatkozik.

Az időfejlődést az infinitezimális idő-eltolás generátorával állíthatjuk elő, ez a Hamilton-operátor. Ettől elvárjuk, hogy megegyezzen az idő-eltolás során előálló megmaradó mennyiséggel, vagyis $E = \int d^3\mathbf{x} T^{00}$ energiával.

4 A kezdeti érték probléma

Ennek a jegyzetnek a fő célja az, hogy ki tudjuk számolni egy általános operátor általános kezdeti feltételekkel megadott várható értékét, illetve hogy lássuk, milyen jelenségek illetve nehézségek bukkannak fel az ilyen számolásokban.

A formalizmust pályaintegrállal fogjuk megfogalmazni. Kezdjük azzal, hogy az időfejllesztő operátort reprezentáljuk pályaintegrállal. Ehhez felírjuk:

$$e^{-iH(t_1-t_0)} = \prod_{n=1}^{N-1} e^{-iH\Delta t}, \quad \Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}. \quad (47)$$

Az egyes operátorok közé teljes rendszereket szúrunk be. Ezeket úgy válasszuk meg, hogy azokon az elemi mezők, A_i -k diagonálisan hassanak. Bozonikus mezők esetén, mivel azok adott időargumentumra kommutálnak, ez egyszerűen lehet a közös sajátfüggvényrendszerük:

$$[\hat{\Phi}_n(t), \hat{\Phi}_m(t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}_n(t) |\phi\rangle = \phi_n |\phi\rangle, \quad (48)$$

ezek teljes rendszert alkotnak, azaz

$$\int d\phi |\phi\rangle \langle\phi| = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \forall |\Omega\rangle \quad |\Omega\rangle = \int d\phi \Psi_\Omega(\phi) |\phi\rangle, \quad \Psi_\Omega(\phi) = \langle\phi|\Omega\rangle. \quad (49)$$

A kanonikusan konjugált impulzussal kvantálva az elméletet

$$[\hat{\Phi}_n(t), \hat{\Pi}_m(t)] = i\delta_{nm} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Pi}_m(t) = -i \frac{\delta}{\delta\phi_m(t)}, \quad (50)$$

ami azt jelenti,

$$\Pi_n |\Omega\rangle = \int d\phi (-i) \frac{\delta\Psi_\Omega(\phi)}{\delta\phi_m} |\phi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\phi|\Pi_n|\Omega\rangle = -i \frac{\delta}{\delta\phi_m} \langle\phi|\Omega\rangle. \quad (51)$$

Emiatt a Π_n -ek közös sajátfüggvényrendszerére ($|\Pi\rangle$), elhagyva az n indexet:

$$\langle\phi|\hat{\Pi}|\Pi\rangle = \Pi \langle\phi|\Pi\rangle = -i \frac{\delta}{\delta\phi} \langle\phi|\Pi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\phi|\Pi\rangle = e^{i\Pi\phi}. \quad (52)$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} e^{-iHt} &= \int \prod_{n=1}^N d\Phi_n \partial\Pi_n |\Phi_N\rangle \langle\Phi_N| e^{-iH\Delta t} |\Pi_N\rangle \dots \langle\Phi_2| e^{-iH\Delta t} |\Pi_2\rangle \langle\Pi_2|\Phi_1\rangle \langle\Phi_1| e^{-iH\Delta t} |\Pi_1\rangle \langle\Pi_1|\Phi_0\rangle \langle\Phi_0| = \\ &= \int \prod_{n=1}^N d\Phi_n \partial\Pi_n e^{-iH(\Phi_N, \Pi_N)\Delta t + i\Phi_N \Pi_N \dots - i\Pi_2 \Phi_1 - iH(\Phi_1, \Pi_1)\Delta t + i\Pi_1 \Phi_1 - i\Pi_1 \Phi_0} |\Phi_N\rangle \langle\Phi_0| = \\ &= \int \prod_{n=1}^N d\Phi_n \partial\Pi_n e^{-i \sum_{n=1}^N [H(\Phi_n, \Pi_n) - \Pi_n \partial_t \Phi_n] \Delta t} |\Phi_N\rangle \langle\Phi_0| = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Pi e^{i \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\Phi, \Pi)} |\Phi_N\rangle \langle\Phi_0|. \end{aligned} \quad (53)$$

mert $\Phi_{n+1} - \Phi_n = \Delta t \partial_t \Phi_n + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, és

$$\langle\Phi| e^{-iH\Delta t} |\Pi\rangle = \left(1 - i\Delta t \frac{\langle\Phi|H|\Pi\rangle}{\langle\Phi|\Pi\rangle} \right) \langle\Phi|\Pi\rangle + \mathcal{O}(\Delta t^2) = e^{-iH(\Phi, \Pi)\Delta t + i\Phi\Pi}, \quad (54)$$

valamint $\prod_{n=1}^N d\Phi_n \partial\Pi_n = \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Pi$.

Fermionok esetén a közös sajátfüggvényrendszer csak úgy érhető el, ha a sajátértékek nem a komplex számtestben vannak, hanem maguk is antikommutáló mennyiségek. Más szóval az állapotok nem egy komplex számtestre, hanem egy Grassmann algebrára épülő Hilbert-tér elemei. Ekkor

$$\{\hat{\Psi}_n(t), \hat{\Psi}_m(t)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Psi}_n(t) |\psi\rangle = \psi_n |\psi\rangle, \quad \psi_n \psi_m = -\psi_m \psi_n. \quad (55)$$

Ez utóbbi egyenlet következménye, hogy $\psi^2 = 0$, valamint hogy $\psi_n \psi_m$ már kommutál a többi elemmel (c-szám).

Tekintsünk most egy dimenziós teret (azaz $n = 1$ lehet csak). Vegyünk két állapotot, $|\xi\rangle$ és $|\psi\rangle$ -t, és tekintsük ezek skalár szorzatát $\langle \xi | \psi \rangle$ -t. Használjuk fel, hogy fermionikus rendszerekben a kommutációs reláció helyett antikommutátorral kvantálunk, és hogy minden realiztikus példában $\Pi_\Psi = i\Psi^\dagger$. Emiatt, a bozonikus esetről látott mintára, reprezentáljuk deriválással. Most a következő definíciók lesznek jók:

$$\{\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle \eta | \hat{\Psi} | \xi \rangle = \xi \langle -\eta | \xi \rangle, \quad \langle \eta | \hat{\Psi}^\dagger | \xi \rangle = \frac{\partial}{\partial \xi} \langle -\eta | \xi \rangle, \quad (56)$$

ahol a $\langle -\eta |$ az antikommutációs szabályt miatt jön ki. Ekkor

$$\langle \eta | \hat{\Psi}^\dagger | \xi \rangle = \frac{\partial}{\partial \xi} \langle -\eta | \xi \rangle = \eta^* \langle \eta | \xi \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \eta | \xi \rangle = e^{\eta^* \xi}. \quad (57)$$

Egy szabadsági fok esetén az antikommutációs reláció miatt

$$|\psi\rangle = (1 + \psi \Psi^\dagger) |0\rangle, \quad (58)$$

ahol $\Psi |0\rangle = 0$. Innen is ellenőrizhető a skalár szorzatra kapott alak.

A sajátállapotok teljes rendszert kell alkossanak, amit úgy írunk fel, hogy

$$\int d\psi^* d\psi e^{-\psi^* \psi} |\psi\rangle \langle \psi| = \mathbf{1}, \quad (59)$$

ahol a Grassmann változók feletti integrált még definiálni kell. A fenti egyenlet szerint

$$\begin{aligned} \langle \xi | \xi' \rangle &= 1 + \xi^* \xi' = \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^* \psi} \langle \xi | \psi \rangle \langle \psi | \xi' \rangle = \int d\psi^* d\psi (1 - \psi^* \psi) (1 + \xi^* \psi) (1 + \psi^* \xi') = \\ &= \int d\psi^* d\psi (1 + \xi^* \psi + \psi^* \xi' + \psi \psi^* \xi^* \xi' + \psi \psi^*). \end{aligned} \quad (60)$$

Ez csak akkor teljesülhet tetszőleges ξ, ξ' -re, ha

$$\int d\psi 1 = 0, \quad \int d\psi \psi = 1. \quad (61)$$

A trace képzése ezzel

$$\text{Tr}(\dots) = \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^* \psi} \langle -\psi | \dots | \psi \rangle. \quad (62)$$

Egy szabadsági fok esetén a lehetséges operátorok $1, \Psi$ és Ψ^\dagger , azok trace sorra $1, 0, 0$. Innen csak az egységoperátor trace nem triviális:

$$\text{Tr} 1 = \int d\psi^* d\psi e^{-\psi^* \psi} \langle -\psi | \psi \rangle = \int d\psi^* d\psi e^{-2\psi^* \psi} = \int d\psi^* d\psi (1 + 2\psi \psi^*) = 2, \quad (63)$$

rendben van.

Emiatt aztán

$$\begin{aligned} e^{-iHt} &= \int \prod_{n=0}^N d\psi_n^* d\psi_n e^{-\sum_{n=0}^N \psi_n^* \psi_n} |\psi_N\rangle \langle \psi_N | e^{-iH\Delta t} | \psi_{N-1} \rangle \dots \langle \psi_1 | e^{-iH\Delta t} | \psi_0 \rangle \langle \psi_0 | = \\ &= \int \prod_{n=0}^N d\psi_n^* d\psi_n e^{-\sum_{n=0}^N \psi_n^* \psi_n} |\psi_N\rangle \langle \psi_N | e^{-iH\Delta t} | \psi_{N-1} \rangle \dots \langle \psi_1 | e^{-iH\Delta t} | \psi_0 \rangle \langle \psi_0 | = \\ &= \int \prod_{n=0}^N d\psi_n^* d\psi_n e^{-\psi_N^* \psi_N + \psi_N^* \psi_{N-1} - iH(\psi_N^*, \psi_{N-1})\Delta t - \dots - iH(\psi_1^*, \psi_0)\Delta t} |\psi_N\rangle \langle \psi_0 | = \\ &= \int \prod_{n=0}^N d\psi_n^* d\psi_n e^{-i \sum_{n=0}^{N-1} [H(\psi_n^*, \psi_{n+1}) + i\psi_n^* \partial_t \psi_n] \Delta t - \psi_0^* \psi_0} |\psi_1\rangle \langle \psi_N | = \\ &= \int \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{i \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\psi^*, \psi) - \psi_0^* \psi_0} |\psi_N\rangle \langle \psi_0 |, \end{aligned} \quad (64)$$

ahol $\psi_{n+1} - \psi_n = \partial_t \psi_n \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, valamint

$$\langle \psi | e^{-iH\Delta t} | \psi' \rangle = \left(1 - i\Delta t \frac{\langle \psi | H | \psi' \rangle}{\langle \psi | \psi' \rangle} \right) \langle \psi | \psi' \rangle + \mathcal{O}(\Delta t^2) = e^{-iH(\psi^*, \psi')\Delta t + i\psi^* \psi'} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (65)$$

és $\prod_{n=1}^N d\psi_n^* d\psi_n = \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi$

Mind a fermionikus, mind a bozonikus mezők esetén tehát analóg formulákat kaptunk. A formulák jelentése: t_0 időpontban induló, t_1 időpontba megérkező, időben monoton haladó pályákra kell integrálnunk az e^{iS} fázisfaktort. Az időbeli monotonitás azt jelenti, hogy ha $t_1 > t_0$, akkor időben előre, ha $t_1 < t_0$, akkor viszont időben visszafelé haladó pályáink vannak. Összefoglalva írhatjuk

$$e^{-iH(t_1-t_0)} = \int \mathcal{D}\Pi \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{i \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}} \frac{|\psi_N, \Phi_N\rangle \langle \psi_0, \Phi_0|}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \quad (66)$$

A nevező a PI-ok összezatolásánál jön be, ez biztosítja, hogy $e^{-iHt} e^{-iHt'} = e^{-iH(t+t')}$ igaz legyen.

Miután megkaptuk az időfejllesztő operátor reprezentációját, felírhatjuk egy általános nemlokális $\hat{A}(i_1, t_1; \dots; i_n, t_n)$ operátor várható értékét (itt i_n multi-index). Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\hat{A}(i_1, t_1; \dots; i_n, t_n)$ az elemi mezők polinomja, azaz

$$\hat{A}(x_1, \dots, x_n) = A_{i_1}(t_1) \dots A_{i_n}(t_n). \quad (67)$$

A kezdeti felételeket egy t_0 -nál adott $\hat{\rho}$ kezdeti sűrűségmátrix segítségével írjuk le. Erről feltesszük, hogy normálható, így kiköthetjük a $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$ feltételt, valamint hogy $t_0 < t_i$ $i = 1 \dots n$. A várható érték a következő kifejezéssel adható meg:

$$\langle \hat{A}(x_1, \dots, x_n) \rangle = \text{Tr } \hat{\rho} \hat{A}(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr } \hat{\rho} A_{i_1}(t_1) \dots A_{i_n}(t_n). \quad (68)$$

Speciális példák a sűrűségmátrixra a vákuum-állapot $|0\rangle \langle 0|$, vagy az egyensúlyt leíró statisztikus operátor $Z^{-1} e^{-\beta H}$, ahol $Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$.

Az operátorok időfüggésére felírhatjuk

$$\partial_t A = i[H, A] \quad \Rightarrow \quad A(t) = e^{iH(t-t_0)} A(t_0) e^{-iH(t-t_0)}. \quad (69)$$

ezt visszahelyettesítve kapjuk (elhagyhatjuk a t_0 argumentumot)

$$\hat{A}(x_1, \dots, x_n) = e^{iH(t_1-t_0)} A_1 e^{-iH(t_1-t_2)} A_2 e^{-iH(t_2-t_3)} \dots e^{-iH(t_{n-1}-t_n)} A_n e^{-iH(t_n-t_0)}. \quad (70)$$

Most visszairhatjuk az időfejllesztő operátor reprezentációját, és felhasználhatjuk, hogy a mezők várható értékei

$$\langle \Pi | \hat{\Phi}_n | \Phi \rangle = \Phi_n \langle \Pi | \Phi \rangle, \quad \langle \Pi | \hat{\Pi}_n | \Phi \rangle = \Pi_n \langle \Pi | \Phi \rangle, \quad \langle \psi' | \hat{\Psi}_n | \psi \rangle = \psi_n \langle \psi' | \psi \rangle, \quad \langle \psi' | \hat{\Psi}_n^\dagger | \psi \rangle = \psi_n'^* \langle \psi' | \psi \rangle. \quad (71)$$

amit kapunk

$$\langle \hat{A}(x_1, \dots, x_n) \rangle = \int_{C \text{ path}} \mathcal{D}\varrho e^{i \int_C dt \mathcal{L}} A_1(t_1) \dots A_n(t_n), \quad (72)$$

ahol

$$\mathcal{D}\varrho = \mathcal{D}\Pi \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi \frac{\langle -\psi_i, \Phi_i | \hat{\rho} | \psi_f, \Phi_f \rangle}{\langle \psi_i | \psi_i \rangle} \equiv \mathcal{D}A \frac{\langle -\psi_i, \Phi_i | \hat{\rho} | \psi_f, \Phi_f \rangle}{\langle \psi_i | \psi_i \rangle}. \quad (73)$$

ahol az f ill. i index a vég (final) ill. kezdeti (initial) konfigurációkra vonatkozik. Az általános mezők feletti PI integrálási mértékét $\mathcal{D}A$ -val jelöltük.

A képletben szereplő idő-pálya (kontúr) valójában egy zárt idő-hurok, amely $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n \rightarrow t_0$ módon megy. Erre azért van szükség, mert a PI-on belül a mezők már a klasszikus értékükkel szerepelnek, ezért automatikusan időrendezett várható értéket kapunk. Ha az argumentumok össze-vissza szerepelnek, akkor olyan kontúrt kell használnunk, amely szerinti rendezés éppen a megfelelő operátor-sorrendet adja vissza. Amennyiben egy rész időben monoton, akkor a megfelelő szakasz egyetlen szakasszá olvad össze; pl. $t_1 > t_2 > t_3$ esetén

írhatjuk $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3$ helyett, hogy $t_1 \rightarrow t_3$. Ezen felül mindenhol be lehet szűrni egy $e^{iH(t'-t)}e^{-iH(t'-t)}$ egységoperátort, ami azt jelenti, hogy tetszőleges ponton beszűrhető az idő-láncba egy kitérő, azaz $t_n \rightarrow t_{n+1}$ helyett írható $t_n \rightarrow t' \rightarrow t_n \rightarrow t_{n+1}$. Mindezek alapján az idő-kontúr alakja $t_0 \rightarrow \infty \rightarrow t_0 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \rightarrow t_0$, ahol az oda-vissza futások száma elégséges kell legyen ahhoz, hogy (rendezést is figyelembe véve) az összes operátort magába foglalja. Ez az alak már csak az operátorok számán keresztül függ az operátoroktól.

Hogy ezt az általánosságot kissé megszorítsuk tekintsünk csak olyan várható értékeket, amelyek rendezése

$$\hat{A}(x_1, \dots, x_n) = T^*(A_1(t_1) \dots A_n(t_n)) \times T(A_{n+1}(t_{n+1}) \dots A_{n+m}(t_{n+m})), \quad (74)$$

ahol T^* az anti-időrendezést jelenti (azaz $t_1 < t_2 < \dots < t_n$). Erre elég két szakaszt megtartani, a $t_0 \rightarrow \infty \rightarrow t_0$ módon, egyben ez a legkevesebb szakaszt tartalmazó kontúr, azaz egyetlen lokális operátor várható értékéhez is ezt kell kiértékelni. Ekkor érdemes olyan jelölést alkalmazni, hogy 1-es kontúrnak nevezzük a $t_0 \rightarrow \infty$ szakaszt, és ha egy operátor időargumentuma ezen az (időrendezett) szakaszon van, akkor ellátjuk egy 1 felső indexszel; az anti-időrendezett szakasznál a 2-es indexet használjuk. Az 1-es terek maguk között mindig időrendezve vannak, a 2-esek anti-időrendezve, és a 2-esek bármely időargumentumnál az 1-es tereknél későbbinek számítanak, azaz az 1-esektől balra helyezkednek el.

A hatás-funkcionál:

$$S = \int_{t_0}^{\infty} dt L \quad (75)$$

Az anti-időrendezett szakaszokon eredetileg $\infty \rightarrow t_0$ az integrálás határai, a fenti alakra hozva tehát egy -1 előjelet is kapunk. Végül a fenti \hat{A} operátor PI reprezentációja

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(x_1, \dots, x_{n+m}) \rangle &= \int \mathcal{D}A^{(1)} \mathcal{D}A^{(2)} \frac{\langle -\psi_i, \Phi_i | \hat{\rho} | \psi_f, \Phi_f \rangle}{\langle \psi_i | \psi_i \rangle} e^{iS[A^{(1)}] - iS[A^{(2)}]} \times \\ &\times A_1^{(2)}(t_1) \dots A_n^{(2)}(t_n) A_{n+1}^{(1)}(t_{n+1}) \dots A_{n+m}^{(1)}(t_{n+m}). \end{aligned} \quad (76)$$

Hogy a jelöléseket egyszerűsítsük, használni fogjuk a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} A &= (A^{(1)}, A^{(2)}), \quad \mathcal{D}A = \mathcal{D}A^{(1)} \mathcal{D}A^{(2)}, \quad S[A] = S[A^{(1)}] - S[A^{(2)}] \\ \varrho[A] &= \frac{\langle -\psi_i, \Phi_i | \hat{\rho} | \psi_f, \Phi_f \rangle}{\langle \psi_i | \psi_i \rangle}, \quad \mathcal{D}\varrho = \mathcal{D}A \varrho[A]. \end{aligned} \quad (77)$$

Ezzel a fenti alak

$$\langle \hat{A}(x_1, \dots, x_n) \rangle = \int \mathcal{D}\varrho e^{iS[A]} A_1(t_1) \dots A_n(t_n) \quad (78)$$

kifejezésre egyszerűsödik.

A $\varrho[A]$ nem függ a teljes pályától, csak a mezők kezdeti illetve végértékétől. Valójában az integrálás határfeltételeit biztosítja.

4.1 Propagátorok

A fentiekre példa a 2-pont függvények esete. $A(t_1)$ és $B(t_2)$ négyféle módon rendezhető, $A(t_1)B(t_2)$, $B(t_2)A(t_1)$, $TA(t_1)B(t_2)$ és $T^*A(t_1)B(t_2)$. Az első eset kontúr-rendezés szempontjából olyan kell legyen, hogy függetlenül t_1 és t_2 konkrét értékétől t_1 nagyobbak számítson, mint t_2 . Ez azt jelenti, hogy $A(t_1)$ a C_2 -n, $B(t_2)$ a C_1 -en legyen. A kontúr-rendezést T_C -vel jelöljük, akkor ezt $\langle T_C A^{(2)}(t_1) B^{(1)}(t_2) \rangle$ módon írhatjuk, ami azt jelenti, hogy a PI alá $A^{(2)}(t_1) B^{(1)}(t_2)$ írandó. A propagátorokat G_{AB} -val jelölve tehát:

$$\begin{aligned} iG_{AB}^{12}(t_1, t_2) &= \langle T_C A^{(1)}(t_1) B^{(2)}(t_2) \rangle = \alpha \langle B(t_2) A(t_1) \rangle \\ iG_{AB}^{21}(t_1, t_2) &= \langle T_C A^{(2)}(t_1) B^{(1)}(t_2) \rangle = \langle A(t_1) B(t_2) \rangle \\ iG_{AB}^{11}(t_1, t_2) &= \langle T_C A^{(1)}(t_1) B^{(1)}(t_2) \rangle = \langle TA(t_1) B(t_2) \rangle = \Theta(t_1 - t_2) iG_{AB}^{21}(t_1, t_2) + \Theta(t_2 - t_1) iG_{AB}^{12}(t_1, t_2) \\ iG_{AB}^{22}(t_1, t_2) &= \langle T_C A^{(2)}(t_1) A^{(2)}(t_2) \rangle = \langle TA(t_1) B(t_2) \rangle = \Theta(t_2 - t_1) iG_{AB}^{21}(t_1, t_2) + \Theta(t_1 - t_2) iG_{AB}^{12}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (79)$$

ahol

$$\alpha = \pm 1 = \begin{cases} +1 & \text{bozonokra} \\ -1 & \text{fermionokra} \end{cases}. \quad (80)$$

Természetesen a T_C -rendezés alatt a sorrend (fermionikus operátoroknál előjel erejéig) nem számít.

Látható módon a propagátoroknál a többféle rendezés általános esetben is két alakra és a Θ -függvényekre vezethető vissza, azaz elég csupán G^{12} és G^{21} propagátorokat kiszámolni. Egy egyszerű megfigyelés, amely a (79) egyenletről kiolvasható, azt mutatja, hogy

$$G^{11} + G^{22} = G^{12} + G^{21}. \quad (81)$$

Hogy ezt a követelményt automatikusan teljesítsük, bevezethetjük a C_{12} kontúrion értelmezett terek kombinációit, és azok propagátorát számíthatjuk, így kapjuk az R/A formalizmust. Legyen

$$A^{(r)} = \frac{A^{(1)} + A^{(2)}}{2}, \quad A^{(a)} = A^{(1)} - A^{(2)}. \quad (82)$$

Ezekre, elhagyva most az argumentumokat

$$\begin{aligned} iG_{AB}^{rr} &= \langle T_C A^{(r)} B^{(r)} \rangle = \frac{1}{4} (iG_{AB}^{11} + iG_{AB}^{12} + iG_{AB}^{21} + iG_{AB}^{22}) = \frac{iG_{AB}^{12} + iG_{AB}^{21}}{2} = \left\langle \frac{A(t_1)B(t_2) + \alpha B(t_2)A(t_1)}{2} \right\rangle \\ iG_{AB}^{ra} &= \langle T_C A^{(r)} B^{(a)} \rangle = \frac{1}{2} (iG_{AB}^{11} - iG_{AB}^{12} + iG_{AB}^{21} - iG_{AB}^{22}) = iG_{AB}^{11} - iG_{AB}^{12} = \Theta(t_1 - t_2) \varrho_{AB}(t_1, t_2) \\ iG_{AB}^{ar} &= \langle T_C A^{(a)} B^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} (iG_{AB}^{11} + iG_{AB}^{12} - iG_{AB}^{21} - iG_{AB}^{22}) = iG_{AB}^{11} - iG_{AB}^{21} = -\Theta(t_2 - t_1) \varrho_{AB}(t_1, t_2) \\ iG_{AB}^{aa} &= \langle T_C A^{(a)} B^{(a)} \rangle = iG_{AB}^{11} - iG_{AB}^{12} - iG_{AB}^{21} + iG_{AB}^{22} = 0, \end{aligned} \quad (83)$$

ahol bevezettük a

$$\varrho_{AB}(t_1, t_2) = iG_{AB}^{21} - iG_{AB}^{12} = \langle A(t_1)B(t_2) - \alpha B(t_2)A(t_1) \rangle \quad (84)$$

spektrál függvényt, amely a mezők (anti)kommutátora.

Az aa propagátor mindig nulla! Az rr propagátort szokták Keldysh propagátornak is nevezni, a $G^{(ra)}$ a retardált propagátor, a $G^{(ar)}$ az avanszált propagátor. A retardált és avanszált propagátorok különbsége is a spektrál függvény

$$\varrho_{AB}(t_1, t_2) = iG_{AB}^{ra} - iG_{AB}^{ar}. \quad (85)$$

4.2 Generátor funkcionál

Hogy a jelöléseket kissé egyszerűsítsük, bevezetjük a generátor funkcionált. Jelöljük $J = (J^{(1)}, J^{(2)})$ és $JA = J^{(1)}A^{(1)} + J^{(2)}A^{(2)}$. Ekkor

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\varrho e^{iS[A] + \int JA}. \quad (86)$$

Itt a J mennyiségeket áramoknak hívjuk, bozonikus szabadsági fokokhoz valós (ill. komplex) áramokat rendelünk, fermionikus szabadsági fokokhoz pedig Grassmann változókat.

Világos módon

$$Z[0, 0] = \text{Tr } \hat{\varrho} = 1. \quad (87)$$

A generátor funkcionál deriváltjai a korrelációs függvények:

$$\left\langle \hat{A}(x_1, \dots, x_n) \right\rangle = \frac{\delta^{n+m} Z[J^{(1)}, J^{(2)}]}{\delta J_1^{(2)}(t_1) \dots \delta J_n^{(2)}(t_n) \delta J_{n+1}^{(1)}(t_{n+1}) \dots \delta J_{n+m}^{(1)}(t_{n+m})} \Bigg|_{J=0}. \quad (88)$$

A deriválások sorrendje fermionoknál fontos a helyes előjel miatt.

4.3 Speciális kezdőfeltételek

A fenti formula a legáltalánosabb nemegyensúlyi kezdőfeltételeket tartalmazza, azonban a praktikus számításokhoz meg kell szorítanunk az általánosságot, hogy kezelhető kifejezésekhez jussunk. Ezen felül, bár egy általános sűrűségmátrixból indulva bonyolult dinamika alakulhat ki, ez a dinamika nagyon egyedi. Ha pontosan meghatározott kezdeti feltételeink lennének valamilyen fizikai alapelv miatt, akkor értelme lenne

ezt a bonyolult dinamikát pontosan vizsgálni. Azonban általában véve nincs kitüntetett sűrűségmátrix, és paraméterezni – a végtelen sok paraméter miatt – lényegében lehetetlen. Aminek fizikai jelentése van, az egy általános kezdőfeltételből induló tranzien viselkedés után beálló, univerzális dinamika. Ennek felderítésére két módszert alkalmazhatunk: vagy feltesszük, hogy már közel vagyunk az egyensúlyhoz, és az egyensúly felől megközelítve írjuk le a dinamikát (lineáris vagy magasabb rendű válasz elmélet). A másik megközelítés, hogy egy egyszerű kezdeti sűrűségmátrixot veszünk, amely analitikusan kezelhető, és feltételezzük, hogy megfelelően általános következtetésekhez vezet. Ilyen kezdeti feltételek lehetnek, hogy pl. tér-sajátállapotból indulunk, ahol a több-pont összefüggő korrelációs függvények nullák (l. később), vagy olyanok, ahol csak az egy- és két-pont összefüggő korrelációs függvények különböznek nullától. A fenti megfontolások miatt először egyensúlyi sűrűségmátrixokat fogunk vizsgálni.

5 Egyensúly

Egyensúlyban a sűrűségmátrix alakja

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta H}, \quad Z_0 = \text{Tr} e^{-\beta H}, \quad (89)$$

Itt kihasználhatjuk, hogy formálisan ugyanolyan alakot kaptunk, mint az időfejlődésnél, ami jól látszik a $\beta \rightarrow it$, $t \rightarrow -i\beta$ megfeleltetéséből. Erre tehát ugyanaz a PI reprezentáció alkalmazható mint eddig (l. (66)), mégpedig praktikusán egy $t_0 \rightarrow t_0 - i\beta$ pályára alkalmazva

$$e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}A e^{i \int_{t_0}^{t_0 - i\beta} \mathcal{L}} |\psi_N, \Phi_N\rangle \frac{1}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \langle \psi_0, \Phi_0|. \quad (90)$$

Ez az alak tehát folytonosan csatlakoztatható az eddigi pályák végéhez. Ehhez az $e^{-\beta H}$ PI reprezentációjában szereplő pályákat 3-as indexxel látjuk el, és definiáljuk az euklideszi hatást, mint

$$S_E = -i \int_{t_0}^{t_0 - i\beta} dt L[A(t), \partial_t A(t)] = \left\{ \begin{array}{l} t = t_0 - i\tau, \tau = i(t - t_0) \\ dt = -i d\tau, \tau = [0, \beta] \\ A(t_0 - i\tau) = A^{(3)}(\tau), \partial_t = i\partial_\tau \end{array} \right\} = \int_0^\beta d\tau (-) L[A^{(3)}(\tau), i\partial_\tau A^{(3)}(\tau)]. \quad (91)$$

Emiatt a reprezentáció miatt eltűnik a $\hat{\rho}$ a kifejezésből, és a trace miatt a pálya záródik. A pályák folytatásánál a kezdő konfiguráció megegyezik a vég-konfigurációval, és ez bozonokra periodikus határfeltételeket jelent. A fermionoknál viszont, a trace-ben fellépő -1 miatt *antiperiodikus pályákkal* kell számolnunk.

A generátor-funkcionált (86) kiegészíthetjük a 3-as indexű terekkel illetve áramokkal:

$$Z[J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}] = \frac{1}{Z_0} \int_{(\text{anti})\text{periodikus}} \mathcal{D}A^{(1)} \mathcal{D}A^{(2)} \mathcal{D}A^{(3)} e^{iS[A^{(1)}] - iS[A^{(2)}] - S_E[A^{(3)}]} e^{\int [iJ^{(1)} A^{(1)} + iJ^{(2)} A^{(2)} - \int_0^\beta d\tau J^{(3)} A^{(3)}]}. \quad (92)$$

ahol

$$Z_0 = \int_{(\text{anti})\text{periodikus}} \mathcal{D}A^{(3)} e^{-S_E[A^{(3)}]} = Z[0, 0, 0]. \quad (93)$$

A kifejezésben szereplő idő-kontúr a 1 ábrán látható.

A fenti alak következményeként most akár

$$\hat{A} = T_\tau A_1(it_1) \dots A_n(it_n) T^* B_1(t'_1) \dots B_m(t'_m) TC_1(t''_1) \dots C_\ell(t''_\ell) \quad (94)$$

operátor várható értékét is számolhatjuk ezzel a kifejezéssel, ahol T_τ a 3. kontúron érvényes időrendezést jelenti:

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\delta^n Z[J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}]}{(-) \delta J^{(3)} \dots i \delta J^{(2)} \dots i \delta J^{(1)}}. \quad (95)$$

Az egyensúly következménye, hogy időeltolás-invariáns, így t_0 invariáns a rendszerünk, vagyis választható $t_0 \rightarrow -\infty$. Ekkor azonban jelentős egyszerűsítést kaphatunk. Ha olyan (összefüggő) korrelációs függvény

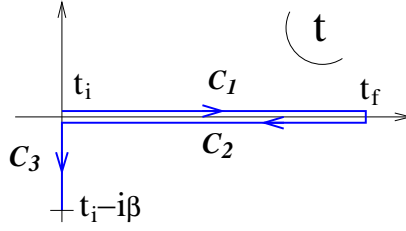


Figure 1: Végés hőmérsékletű idő-kontúr

nézünk, amelynek van argumentuma $C_{1,2}$ -n és C_3 -on is, akkor közöttük végtelen hosszú propagálásra van szükség. Minden reális kölcsönható elméletben van valamilyen csillapodás, ami azt jelenti, hogy ezek a várható értékek nullák lesznek. Más szóval a dinamika szempontjából a C_3 kontúr *lecsatolódik* a $C_{1,2}$ kontúrról, ezért elég kizárólag az ezeken a kontúrokon levő terek saját maguk közötti korrelációját kiszámolni.

5.1 Vákuum várható érték

A vákuum várható érték a véges hőmérsékletű eset egy speciális határeset. Ha ugyanis $\beta \rightarrow \infty$, akkor energia sajátállapotokkal reprezentálva

$$e^{-\beta H} = \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle \langle n| \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} |0\rangle \langle 0|. \quad (96)$$

A vákuum várható érték tehát a nulla hőmérsékletű határeset.

Ekkor $\hat{\rho} = |0\rangle \langle 0|$, valamint kizárólag időrendezett szorzatot számolunk. Ekkor (70) kifejezésből

$$\langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | e^{iH(t_\infty - t_0)} | n \rangle \langle n | e^{-iH(t_\infty - t_1)} A_1 e^{-iH(t_1 - t_2)} \dots A_n e^{-iH(t_n - t_0)} | 0 \rangle. \quad (97)$$

Mivel források nélkül a vákuum egyértelműsége és az energiamegmaradás miatt nem keletkezhet később sem más, mint vákuum, ezért a fenti kifejezésben kizárólag $|n\rangle = |0\rangle$ marad. A vákuum normáltsága miatt

$$e^{iH(t_\infty - t_0)} |0\rangle = e^{-i\alpha} |0\rangle \Rightarrow e^{-i\alpha} = \langle 0 | e^{iH(t_\infty - t_0)} | 0 \rangle = (\langle 0 | e^{-iH(t_\infty - t_0)} | 0 \rangle)^* = \frac{1}{\langle 0 | e^{-iH(t_\infty - t_0)} | 0 \rangle}. \quad (98)$$

Itt a nevezőnek most már van időrendezett PI reprezentációja.

A második faktor teljesen időrendezett, és csak egy szakaszt tartalmaz a kontúrból, vagyis a PI-reprezentációja:

$$\langle 0 | T \hat{A}_1 \dots \hat{A}_n | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} A_1 \dots A_n}{\int \mathcal{D}A e^{iS[A]}}. \quad (99)$$

5.2 Kémiai potenciál

Ha van megmaradó áramunk, akkor definiálhatjuk a nagykaonikus állapotösszeget

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu N)}, \quad [H, N] = 0. \quad (100)$$

Ekkor pontosan ugyanúgy járhatunk el, mint fent, azzal a kivétellel, hogy az Euklideszi hatásba bele kell illeszteni a megmaradó áramot is. Ha N Noether töltés, akkor

$$N = \int d^3\mathbf{x} n(x) \Rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mu n \Rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mu n \Rightarrow S_E \rightarrow S_E - \mu \int_0^\beta d\tau N[A^{(3)}, i\partial_\tau A^{(3)}]. \quad (101)$$

5.3 Propagátorok

Egyensúlyban az általános (79) alak egyszerűbbé válik. Kihaszználjuk, hogy homogén térben az egyensúly tér- és időeltolás invariáns, ekkor a propagátorok csak az argumentumok különbségétől függenek, azaz lehet $t_1 = t$, $t_2 = 0$ argumentumokat használni (79)-ben. Ezen felül még a C_3 kontúron felvett propagátorokat is kiszámolhatjuk, azaz a következő rendezéseket fogjuk tekinteni:

$$\begin{aligned}
iG_{AB}^{12}(t) &= \langle T_C A^{(1)}(t)B^{(2)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} \alpha B(0)A(t)] \\
iG_{AB}^{21}(t) &= \langle T_C A^{(2)}(t)B^{(1)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} A(t)B(0)] \\
iG_{AB}^{11}(t) &= \langle T_C A^{(1)}(t)B^{(1)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} T A(t)B(0)] = \Theta(t) iG_{AB}^{21}(t) + \Theta(-t) iG_{AB}^{12}(t) \\
iG_{AB}^{22}(t) &= \langle T_C A^{(2)}(t)B^{(2)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} T^* A(t)B(0)] = \Theta(t) iG_{AB}^{21}(t) + \Theta(-t) iG_{AB}^{12}(t) \\
G_{AB}^{33}(t) &= \langle T_C A^{(3)}(t)B^{(3)}(0) \rangle = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} T_\tau A(-i\tau)B(0)] = \Theta(\tau) iG_{AB}^{21}(-i\tau) + \Theta(-\tau) iG_{AB}^{12}(-i\tau),
\end{aligned} \tag{102}$$

Megjegyzés: a G_{AB}^{33} propagátorba nem szokták beledefiniálni az i -t, mi is ezt a konvenciót követjük.

Miután minden kifejezhető G^{12} és G^{21} segítségével, csak ezt a kettőt vizsgáljuk tovább. Kihasználva, hogy $e^{-\beta H}$ kezelhető úgy is, mint egy $-i\beta$ idejű eltolás, valamint a trace ciklikusságát, kapjuk

$$\begin{aligned}
iG_{AB}^{12}(t) &= \frac{\alpha}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} B(0)A(t)] = \frac{\alpha}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} e^{\beta H} A(t)e^{-\beta H} B(0)] = \\
&= \frac{\alpha}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta H} A(t - i\beta)B(0)] = \alpha iG_{AB}^{21}(t - i\beta).
\end{aligned} \tag{103}$$

Ez a KMS-feltétel (Kubo-Martin-Schwinger). Fourier transzformáció után, valamint kihasználva (84) egyenletet

$$iG_{AB}^{12}(\omega) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} iG_{AB}^{21}(t - i\beta) = \alpha e^{-\beta\omega} iG_{AB}^{21}(\omega) = \alpha e^{-\beta\omega} (\varrho_{AB}(\omega) + iG_{AB}^{12}(\omega)), \tag{104}$$

ahonnan

$$iG_{AB}^{12}(\omega) = \alpha n_\alpha(\omega) \varrho_{AB}(\omega), \quad iG_{AB}^{21}(\omega) = (1 + \alpha n_\alpha(\omega)) \varrho_{AB}(\omega), \quad \text{ahol} \quad n_\alpha(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - \alpha}, \tag{105}$$

a Bose-Einstein (+) illetve Fermi-Dirac (-) eloszlás. A formula egyik fő ereje, hogy *tetszőleges* A , B operátorra igaz marad! Az n_α eloszlások egy lényeges tulajdonsága

$$1 + \alpha n_\alpha(-\omega) = -\alpha n_\alpha(\omega), \tag{106}$$

hiszen

$$1 + \frac{\alpha}{e^{-\beta\omega} - \alpha} = -\frac{e^{-\beta\omega}}{\alpha - e^{-\beta\omega}} = -\alpha \frac{1}{e^{\beta\omega} - \alpha}. \tag{107}$$

Nulla hőmérsékleten:

$$n_\alpha(\omega) \xrightarrow{T \rightarrow 0} -\alpha \Theta(-\omega). \tag{108}$$

Kémiai potenciál esetén is elvégezhető a fenti gondolatmenet, ha az A operátor határozott töltéssel rendelkezik, azaz

$$[N, A] = qA \quad \Rightarrow \quad A(s) = e^{-sN} A e^{sN} : \quad \frac{dA(s)}{ds} = -qA(s) \quad \Rightarrow \quad e^{-sN} A e^{sN} = e^{-qs} A. \tag{109}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned}
iG_{AB}^{12}(t) &= \frac{\alpha}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta(H-\mu N)} B(0)A(t)] = \frac{\alpha}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta(H-\mu N)} e^{\beta(H-\mu N)} A(t) e^{-\beta(H-\mu N)} B(0)] = \\
&= e^{-q\beta\mu} \frac{\alpha}{Z_0} \text{Tr} [e^{-\beta(H-\mu N)} A(t - i\beta)B(0)] = e^{-q\beta\mu} \alpha iG_{AB}^{21}(t - i\beta).
\end{aligned} \tag{110}$$

Innen:

$$iG_{AB}^{12}(\omega) = \alpha e^{-\beta(\omega+q\mu)}(\varrho_{AB}(\omega) + iG_{AB}^{12}(\omega)), \quad (111)$$

ahonnan

$$iG_{AB}^{12}(\omega) = \alpha n_\alpha(\omega + q\mu)\varrho_{AB}(\omega, \mu), \quad iG_{AB}^{21}(\omega) = (1 + \alpha n_\alpha(\omega + q\mu))\varrho_{AB}(\omega, \mu). \quad (112)$$

R/A formalizmusban a retardált (*ra*) propagátor (83) miatt a spektrál függvénnyel arányos. Kihasznlva a theta-függvény Fourier transzformált alakját

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \Theta(t) \rightarrow \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t - \varepsilon t} = \frac{i}{\omega + i\varepsilon}, \quad (113)$$

valamint hogy a szorzat Fourier-transzformáltja konvolúció

$$(fg)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)g(t) e^{i\omega t} = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} f(\omega')g(\omega'') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega' - \omega'')t} = \int \frac{d\omega'}{2\pi} f(\omega - \omega')g(\omega'), \quad (114)$$

kapjuk $iG_{AB}^{ra}(k) = (\Theta\varrho_{AB})(k)$ miatt

$$G_{AB}^{ra}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho_{AB}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon}, \quad G_{AB}^{ar}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho_{AB}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega - i\varepsilon}, \quad (115)$$

Kramers-Krönig relációkat.

A Kramers-Krönig relációk felfoghatók úgy is, mint a kauzalitás következményei. Ez annyit jelent, hogy ha egy korrelátor tartalmazza a theta-függvényt, ami (l. később) azt jelenti, hogy a válasz szigorúan a hatást követi, akkor a Fourier-transzformált alak ilyen alakú.

A relációk következménye, hogy a retardált illetve avanszált propagátor úgy kapható, mint a “generikus” propagátor az $\omega \pm i\varepsilon$ helyen:

$$G_{AB}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho_{AB}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega} \Rightarrow G_{AB}^{ra}(k) = G_{AB}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}), \quad G_{AB}^{ar}(k) = G_{AB}(k_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}). \quad (116)$$

A Kramers-Krönig relációkat invertálni is lehet. Ehhez a diszkontinuitás fogalmát vezetjük be:

$$\text{Disc}_x f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)). \quad (117)$$

Speciálisan

$$\text{Disc}_x \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x + i\varepsilon} - \frac{1}{x - i\varepsilon} \right] = -2\pi i \delta(x). \quad (118)$$

Emiatt

$$\varrho_{AB}(k) = \text{Disc}_{k_0} iG_{AB}(k) = \text{Disc}_{k_0} iG_{AB}^{ra}(k). \quad (119)$$

Ez azt is jelenti, hogy a Fourier-tér alakok is tudják a (85) relációt.

Az *rr* propagátor (Keldysh-propagátor):

$$G_{AB}^{rr}(k) = \left(\frac{1}{2} + \alpha n_\alpha(k_0) \right) \varrho_{AB}(k). \quad (120)$$

Láthatóan a spektrál függvények központi szerepet játszanak, emiatt érdemes néhány tulajdonságukat megállapítani (kihasználva egyensúlyban az időeltolás-invarianciát)

$$\begin{aligned} \varrho_{AB}^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle [B^\dagger(0), A^\dagger(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle [B^\dagger(t), A^\dagger(0)] \rangle = \varrho_{B^\dagger A^\dagger}(\omega), \\ \varrho_{AB}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle [A(t), B(0)] \rangle = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle [B(t), A(0)] \rangle = -\alpha \varrho_{BA}(\omega), \end{aligned} \quad (121)$$

A fentiek miatt a spektrál függvény valós, ha

$$\varrho_{AB}^*(\omega) = \varrho_{AB}(\omega) = \varrho_{B^\dagger A^\dagger}(\omega) \quad \Rightarrow \quad B = A^\dagger. \quad (122)$$

Ebben az esetben további megállapításokat tehetünk. Felhasználva, hogy:

$$A(x) = e^{iPx} A(0) e^{-iPx}, \quad (123)$$

ahol P a négyesimpulzus operátora, és beszúrva egy teljes négyesimpulzus sajátállapot-rendszert a korrelátorba kapjuk

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-\beta H} [A(x), B(0)] &= \sum_n \langle n | e^{-\beta H} [A(x), B(0)] | n \rangle = \sum_{n,m} (e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}) \langle n | A(x) | m \rangle \langle m | A^\dagger(0) | n \rangle = \\ &= \sum_{n,m} (e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}) e^{i(P_n - P_m)x} |\langle n | A(0) | m \rangle|^2. \end{aligned} \quad (124)$$

Emiatt

$$\varrho_{AA^\dagger}(k) = \sum_{n,m} (2\pi)^4 \delta(k + P_n - P_m) (e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}) |\langle n | A(0) | m \rangle|^2. \quad (125)$$

A fenti formula következményei:

- diszkrét spektrum esetén $\varrho_{AA^\dagger}(k)$ Dirac-delták sorozatából áll (ezek összeolvadhatnak egy folytonos függvénné)
- $\varrho_{AA^\dagger}(k) \neq 0$ ott, ahol van két olyan sajátállapot, amelyre $E_n - E_m = k_0$ és $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m = \mathbf{k}$.
- Ha $k_0 > 0$, akkor $E_m > E_n$, emiatt az exponenciálisok különbsége mindig pozitív. Tehát

$$\varrho_{AA^\dagger}(k_0 > 0, \mathbf{k}) > 0. \quad (126)$$

- nulla hőmérsékleten

$$\varrho_{AA^\dagger}(k) \Big|_{T=0} = \sum_m (2\pi)^4 \delta(k - P_m) |\langle 0 | A(0) | m \rangle|^2, \quad (127)$$

ennek értelmezése: súlyozott állapotosság.

Ebben az esetben G_{AA^\dagger} "generikus" propagátor is valós, így igaz, hogy

$$G_{AA^\dagger}^{ra*}(k) = G_{AA^\dagger}^*(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) = G_{AA^\dagger}(k_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}) = G_{AA^\dagger}^{ar}(k). \quad (128)$$

Emellett

$$\begin{aligned} \text{Im } G_{AA^\dagger}^{ra}(k) &= \text{Im } G_{AA^\dagger}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) = \frac{1}{2i} [G_{AA^\dagger}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) - G_{AA^\dagger}(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k})] = -\frac{1}{2} \varrho_{AA^\dagger}(k) \\ \text{Re } G_{AA^\dagger}^{ra}(k) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Re} \frac{\varrho_{AA^\dagger}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon} = \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho_{AA^\dagger}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega} \end{aligned} \quad (129)$$

Az avanszált propagátornál az imaginárius rész számolásánál egy előjelkülönbség jön be.

Vizsgáljuk meg az imaginárius idejű propagátort is. Először is, a KMS feltétel miatt $0 \leq \tau \leq \beta$ tartományban

$$G_{AB}^{33}(-\tau + \beta) = iG_{AB}^{21}(i\tau - i\beta) = \alpha iG_{AB}^{12}(i\tau) = \alpha G_{AB}^{33}(-\tau), \quad (130)$$

azaz G_{AB}^{33} β szerint (anti)periodikus. Emiatt a Fourier-transzformáltban csak diszkrét frekvenciák fordulhatnak elő

$$\omega_n = \begin{cases} 2\pi nT & \text{bozonokra} \\ (2\pi + 1)nT & \text{fermionokra.} \end{cases} \quad (131)$$

A Fourier transzformáltra pedig, amit most diszkrét esetben a következőképp értelmezzünk:

$$f(\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} f(\tau), \quad f(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} f(\omega_n), \quad (132)$$

adódik:

$$G_{AB}^{33}(\omega_n, \mathbf{k}) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} G_{AB}^{33}(\tau, \mathbf{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - \alpha} \varrho_{AB}(\omega, \mathbf{k}) \int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n - \omega)\tau} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho_{AB}(\omega, \mathbf{k})}{\omega - i\omega_n}. \quad (133)$$

Összehasonlítva ezt a retardált propagátorra kapott Kramers-Krönig relációval (115) kapjuk:

$$-G_{AB}^{33}(i\omega_n \rightarrow k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) = G_{AB}^{ra}(k). \quad (134)$$

Megjegyzés: egyes könyvekben más alakot látunk, ez egyrészt a Fourier-transzformáció definíciójának különbségéből, másrészt a G_{AB}^{33} propagátor definíciójának különbségéből származik. Ezért mindig egyeztessük a definíciókat az alkalmazás előtt!

5.4 Szabad elméletek

5.4.1 Bozonok

Az eddig elmondottak tetszőleges kölcsönható elméletre igazak voltak. Kvadratikus elméletek esetén azonban ki is lehet számolni a korrelációs függvényeket. Itt kizárólag téridőben lokális elméleteket fogunk vizsgálni, vagyis amelyben az idő- és térderiváltak csak polinomiálisan fordulnak elő.

Kezdjük a legegyszerűbb elmélettel, amely egyetlen, tér- és időeltolás invariáns valós (kvantálva önadjungált) bozonikus szabadsági fokot tartalmaz (Klein-Gordon elmélet). A Lagrange- illetve Hamilton-sűrűsége, térbeli Fourier-transzformáció után

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\Phi)^2 - \frac{1}{2}\Phi\omega^2(i\partial)\Phi \equiv \frac{1}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\Phi\omega^2(i\partial)\Phi, \quad (135)$$

ahol $\omega^2(i\partial)$ csak a térszerű deriváltaktól függő függvény. A kanonikus kvantálás relációi:

$$[\Phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(t, \mathbf{y})] = 0, \quad [\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (136)$$

Emiatt a mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} \partial_t\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}) &= i[H, \hat{\Phi}] = \int d^3\mathbf{y} \frac{i}{2}[\hat{\Pi}^2(t, \mathbf{y}), \hat{\Phi}(t, \mathbf{x})] = \hat{\Pi}(t, \mathbf{x}) \\ \partial_t\hat{\Pi}(t, \mathbf{x}) &= i[H, \hat{\Pi}] = \int d^3\mathbf{y} \frac{-i}{2}[\hat{\Phi}(t, \mathbf{y})\omega^2(i\partial)\hat{\Phi}(t, \mathbf{y}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{x})] = -\omega^2(i\partial)\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}) \\ &\Rightarrow (\partial_t^2 + \omega^2(i\partial))\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2)\hat{\Phi}(t, \mathbf{k}) = 0. \end{aligned} \quad (137)$$

Ennek megoldása

$$\hat{\Phi}(t, \mathbf{k}) = \hat{\Phi}(0, \mathbf{k}) \cos \omega_{\mathbf{k}}t + \hat{\Pi}(0, \mathbf{k}) \frac{\sin \omega_{\mathbf{k}}t}{\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (138)$$

A spektrál függvényre vonatkozó egyenlet tehát

$$\varrho(t, \mathbf{x}) = \langle [\Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(0)] \rangle \Rightarrow (\partial_t^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2)\varrho(t, \mathbf{k}) = 0, \quad (139)$$

ennek megoldása

$$\varrho(t, \mathbf{k}) = \varrho(0, \mathbf{k}) \cos \omega_{\mathbf{k}}t + \partial_t\varrho(0, \mathbf{k}) \frac{\sin \omega_{\mathbf{k}}t}{\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (140)$$

A kezdeti feltételek könnyen kiolvashatók a kommutációs relációkból:

$$\begin{aligned} \varrho(0, \mathbf{x}) &= \langle [\Phi(0, \mathbf{x}), \Phi(0)] \rangle = 0, & \varrho(0, \mathbf{x}) &= 0 \\ \partial_t\varrho(0, \mathbf{x}) &= \langle [\partial_t\Phi(0, \mathbf{x}), \Phi(0)] \rangle = -i\delta(\mathbf{x}), & \partial_t\varrho(0, \mathbf{k}) &= -i, \end{aligned} \quad (141)$$

azaz a kezdeti feltételek, így a megoldás is független a sűrűségmátrixtól. Emiatt a spektrál függvény minden hőmérsékleten, minden kémiai potenciálnál (sőt, még nemegyensúlyi körülmények között is) ugyanolyan alakú:

$$\varrho(t, \mathbf{k}) = -i \frac{\sin \omega_{\mathbf{k}}t}{\omega_{\mathbf{k}}} \Rightarrow \varrho(k) = \frac{2\pi}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[\delta(k_0 - \omega_{\mathbf{k}}) - \delta(k_0 + \omega_{\mathbf{k}}) \right] = 2\pi \operatorname{sgn} k_0 \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2). \quad (142)$$

Fent láttuk, hogy a spektrál függvény ott nem nulla, ahol adott \mathbf{k} -hoz energiaszint tartozik. Ez azt jelenti, hogy a Klein-Gordon hatás olyan részecskéket ír le, amelyek energiája

$$E^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2. \quad (143)$$

Ha $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$, akkor egy relativisztikus, m tömegű részecske diszperziós relációját kapjuk.

A spektrál függvény valós, antiszimmetrikus (l. (121)), pozitív frekvenciákra pozitív. Ennek segítségével felírható

$$\begin{aligned} G^{ra}(k) &= \frac{1}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}, \\ G^{ar}(k) &= \frac{1}{(k_0 - i\varepsilon)^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}, \\ iG^{12}(k) &= 2\pi \operatorname{sgn} k_0 n_+(k_0) \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2), \\ iG^{21}(k) &= 2\pi \operatorname{sgn} k_0 (1 + n_+(k_0)) \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2), \\ iG^{rr}(k) &= 2\pi \left(\frac{1}{2} + n_+(\omega_k) \right) \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2), \\ G^{11}(k) &= \frac{1}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} - 2\pi i (\operatorname{sgn} k_0 n_+(k_0) - \Theta(-k_0)) \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2), \\ G^{22}(k) &= \frac{1}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 - i\varepsilon} + 2\pi i (\operatorname{sgn} k_0 n_+(k_0) - \Theta(-k_0)) \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2), \\ G^{33}(k) &= \frac{1}{k_0^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2} \quad (k_0 = 2\pi nT). \end{aligned} \quad (144)$$

A többpontfüggvényekhez használjuk a generátor funkcionált. Először integráljuk ki a kanonikus impulzus szerint:

$$\int \mathcal{D}\Pi e^{-i(\frac{1}{2}\Pi^2 - \Pi\partial_t\Phi)} = \int \mathcal{D}\Pi e^{-\frac{i}{2}(\Pi - \partial_t\Phi)^2 + \frac{i}{2}(\partial_t\Phi)^2} \sim e^{\frac{i}{2}(\partial_t\Phi)^2}. \quad (145)$$

Ez azt az általánosan is alkalmazható szabályt adja, hogy ha a Hamilton operátorban a kanonikus impulzustól való függés $\sim \Pi^2$, akkor formálisan a pályaintegrálban használhatjuk a $\Pi \rightarrow \partial_t\Phi$ átalakítást. Ebben az esetben tehát:

$$\mathcal{L}(\Pi, \Phi) \rightarrow \mathcal{L}(\partial_t\Phi, \Phi), \quad (146)$$

az eredeti Lagrange-függvény. A továbbiakban végig feltesszük, hogy ez a helyzet.

Ezután írhatjuk a pályaintegrálra, hogy

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi + J\Phi} = \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}(\Phi - iJ\mathcal{K}^{-1})\mathcal{K}(\Phi - iJ\mathcal{K}^{-1}) + \frac{i}{2}J\mathcal{K}^{-1}J} = e^{\frac{i}{2}J\mathcal{K}^{-1}J} \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi}. \quad (147)$$

Az invertálásnál figyelni kell a határfeltételekre; azonban a fenti formula miatt

$$iG = \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J \delta J} \right|_{J=0} = i\mathcal{K}^{-1}, \quad (148)$$

így használhatjuk a korábbi eredményeinket:

$$Z[J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}] = Z_0 \exp \left(\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^{(a)*}(k) G^{ab}(k) J^{(b)}(k) \right), \quad Z_0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{2}\Phi\mathcal{K}\Phi}. \quad (149)$$

Még hátra van a Z_0 kiszámítása. Láttuk, hogy ehhez csak az imaginárius kontúr ad járulékot, azaz

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{-\frac{1}{2}\Phi\mathcal{K}_E\Phi} \sim (\det \mathcal{K}_E)^{-1/2}, \quad (150)$$

hiszen diagonális esetben

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \quad (151)$$

A szabad energiára kapjuk

$$F = -T \ln Z = \frac{1}{2} T \ln \det \mathcal{K}_E = \frac{T}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{K}_E. \quad (152)$$

A konkrét számításhoz alkalmazzunk egy trükköt: írjunk $\omega_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow \omega^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2 + a$ alakot a Lagrange-függvénybe, a számítások végén $a \rightarrow 0$ -t veszünk. Ekkor

$$\frac{\partial Z_0}{\partial a} = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \int \mathcal{D}\Phi \Phi^2(\tau, \mathbf{x}) e^{-S_E} = -\frac{1}{2} \beta V Z_0 \langle \Phi(0)\Phi(0) \rangle = -\frac{1}{2} \beta V Z_0 iG^{rr}(x=0). \quad (153)$$

A differenciálegyenlet megoldása

$$Z_0 = e^{-\beta V f}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{2} iG^{rr}(x=0) \quad (154)$$

A termodinamikai értelmezés szerint f a szabadenergia-sűrűség.

Felhasználva a G^{rr} alakját (l. (144)) írhatjuk

$$iG^{rr}(x=0) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG^{rr}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{2} + n_+(\omega) \right) 2\pi \delta(k_0^2 - \omega^2) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega} (1 + 2n_+(\omega)), \quad (155)$$

innen

$$f(a = \Lambda^2) - f = \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} da \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega} (1 + 2n_+(\omega)) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{\omega_{\mathbf{k}}}^{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \Lambda^2}} d\omega (1 + 2n_+(\omega)). \quad (156)$$

Tegyük fel, hogy $\Lambda \gg$ bármely más fizikai skála, ekkor elhagyjuk a $\Lambda \rightarrow \infty$ esetén nulla járulékokat, és kapjuk

$$f = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}}) \right) - \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Lambda + f(a = \Lambda^2). \quad (157)$$

Az utolsó két tag állandó, vagyis elhagyható. A maradékban az első tag felel meg a $T = 0$ járuléknak, és formálisan a nullponti energia felösszegzését jelenti. Ez a tag divergens, hiszen végtelen sok módusunk van. Mivel ez a tag is hőmérsékletfüggetlenül tolja el a szabadenergiát, ezért ezt is elhagyhatjuk. Ekkor a fizikai szabad energiára

$$F = fV = TV \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}}). \quad (158)$$

A nyomás, illetve belső energia:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -T \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}}), \quad E = \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} = V \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} n_+(\omega_{\mathbf{k}}). \quad (159)$$

Speciális esetekben ez ki is számítható:

- ha $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2/(2m)$, és $T \ll m$, akkor

$$F = -TV \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2}, \quad p = T \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2}, \quad E = \frac{3}{2} pV. \quad (160)$$

Megjegyzés: ha a szokásos \hbar és k_B faktorokat visszaírjuk, akkor $p = T(mk_B T)^{3/2}/(2\pi\hbar^2)^{3/2}$ eredményt kapjuk.

- ha $\omega_{\mathbf{k}} = k$ ultrarelativisztikus diszperziós relációnk van, akkor

$$F = -\frac{\pi^2}{90} VT^4, \quad p = \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad E = 3pV. \quad (161)$$

A \hbar illetve k_B faktorokat is beírva $p = \frac{\pi^2}{90c^3\hbar^3} (k_B T)^4$.

Több szabadsági fok esetén feltesszük, hogy Π -ben diagonális a Hamilton-operátor, valamint megmarad az impulzus. Ekkor, térszerű Fourier-térben

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi_i^\dagger\Pi_i - \frac{1}{2}\Phi_i^\dagger\Omega_{ij}\Phi_j \equiv \frac{1}{2}\mathbf{\Pi}^\dagger\mathbf{\Pi} - \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}^\dagger\mathbf{\Omega}\mathbf{\Phi}. \quad (162)$$

ahol $\mathbf{\Omega}$ szimmetrikus, sajátértékei mind pozitívak, azaz létezik szimmetrikus valós gyöke: $\boldsymbol{\omega}^2 = \mathbf{\Omega}$. A mozgásegyenletek

$$(\partial_t^2 - \boldsymbol{\omega}^2)\mathbf{\Phi} = 0, \quad (163)$$

a spektrál függvény, mozgásegyenlete, illetve a megoldás:

$$\boldsymbol{\varrho}(x) = \langle [\mathbf{\Phi}(x), \mathbf{\Phi}(0)] \rangle \Rightarrow (\partial_t^2 - \boldsymbol{\omega}^2)\boldsymbol{\varrho}(x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varrho} = -i\boldsymbol{\omega}^{-1} \sin \boldsymbol{\omega}t, \quad (164)$$

mert $\boldsymbol{\varrho}(0) = 0$ valamint $\partial_t\boldsymbol{\varrho}(0, \mathbf{k}) = -i\mathbf{1}$. Hogy a Fourier transzformációt el tudjuk végezni, a projektor-felbontást használjuk

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} P_{\lambda}, \quad P_{\lambda} P_{\eta} = \delta_{\eta\lambda} P_{\lambda}. \quad (165)$$

Ezzel

$$\boldsymbol{\varrho}(k) = \sum_{\lambda} \varrho_{\lambda}(k) P_{\lambda}, \quad (166)$$

ahol $\varrho_{\lambda}(k)$ az egy tömeghøj spektrál függvény (142) $\omega_{\lambda}(\mathbf{k})$ diszperziós relációval. Mivel minden kifejezésünk lineáris ϱ -ban, ezért a fenti szumma öröklődik az összes kifejezésünkre. Valójában megfelelő szabadsági fokokkal kifejezve független részecskék szummáját kapjuk.

5.4.2 Fermionok

Ugyanez a gondolatmenet alkalmazható a fermionok esetén is. A szabad Lagrange-függvény itt időben elsőrendű deriváltakat kell tartalmazzon. Ezen felül a (bi)spinortérben is tartalmazhat valamilyen struktúrát:

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger(i\partial_t - M(i\boldsymbol{\partial}))\Psi \equiv \Psi^\dagger\mathcal{K}\Psi \Rightarrow \Pi = i\Psi^\dagger \Rightarrow \mathcal{H} = \Psi^\dagger M(i\boldsymbol{\partial})\Psi. \quad (167)$$

A hatás hermitikusságához \mathcal{K} hermitikus kell legyen. A kvantáláshoz

$$\{\Psi^\dagger(t, \mathbf{x}), \Psi(t, \mathbf{y})\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\Psi(t, \mathbf{x}), \Psi(t, \mathbf{y})\} = 0. \quad (168)$$

Ezzel a mozgásegyenletek:

$$\partial_t\Psi(t, \mathbf{x}) = i[H, \Psi(t, \mathbf{x})] = i \int d^3\mathbf{y} [\Psi^\dagger(t, \mathbf{y})M(i\boldsymbol{\partial})\Psi(t, \mathbf{y}), \Psi(t, \mathbf{x})] = -iM(i\boldsymbol{\partial})\Psi(t, \mathbf{x}) \Rightarrow (i\partial_t - M(i\boldsymbol{\partial}))\Psi = 0. \quad (169)$$

Fourier térben

$$(i\partial_t - M(\mathbf{k}))\Psi(t, \mathbf{k}) = 0 \Rightarrow \Psi(t, \mathbf{k}) = e^{-iM(\mathbf{k})t}\Psi(0, \mathbf{k}). \quad (170)$$

Ezzel a spektrálfüggvény:

$$\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(t, \mathbf{x}) = \langle \{\Psi(t, \mathbf{x}), \Psi^\dagger(0)\} \rangle \Rightarrow (i\partial_t - M(\mathbf{k}))\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(t, \mathbf{k}) = 0 \Rightarrow \varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(t, \mathbf{k}) = e^{-iM(\mathbf{k})t}, \quad (171)$$

ahol figyelembe vettük a $\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(0, \mathbf{k}) = 1$ kezdeti feltételt. Hogy a Fourier-integrált elvégezhesük, használjuk az M mátrix projektor-reprezentációját:

$$M(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda}(\mathbf{k})P_{\lambda} \Rightarrow \varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(k) = \sum_{\lambda} (2\pi)\delta(k_0 - \omega_{\lambda}(\mathbf{k}))P_{\lambda}, \quad (172)$$

ahol P_{λ} a λ altérhez tartozó projektor. Ha csak egy frekvenciánk van, akkor a szumma egytagú. Relativisztikus részecske esetén egy részecske és egy antirészecske van a spektrumban, melyekhez tartozó energiák egymás ellentettjei, azaz $\omega_1 = -\omega_2$. Ekkor a spektrál függvény írható a következő alakban:

$$\begin{aligned} \varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(k) &= \sum_{\lambda} (2\pi) [\delta(k_0 - \omega_{\lambda})P_{\lambda} + \delta(k_0 - \omega_{\lambda})P'_{\lambda}] = \sum_{\lambda} (2\pi) \operatorname{sgn} k_0 \delta(k_0^2 - \omega_{\lambda}^2) [(k_0 + \omega_{\lambda})P_{\lambda} - (k_0 - \omega_{\lambda})P'_{\lambda}] = \\ &= (k_0 + M) \sum_{\lambda} (P_{\lambda} + P'_{\lambda}) \varrho_{\lambda}(k), \end{aligned} \quad (173)$$

ahol ϱ_λ a szabad bozon spektrál függvény (142). Ha csak egyetlen relativisztikus tömegünk van, akkor $P + P' = \mathbf{1}$, azaz ekkor

$$\varrho_{\Psi\Psi^\dagger}(k) = D(k)\varrho(k), \quad \text{ahol} \quad D(k) = k_0 + M. \quad (174)$$

D neve Klein-Gordon osztó, mert ezzel szorozva a mozgásegyenletet megkapjuk a tömeghég feltételt:

$$(k_0 + M)(k_0 - M) = k_0^2 - m^2. \quad (175)$$

A Dirac egyenlet esetén a mozgásegyenlet, illetve a KG osztó:

$$\not{k} - m, \quad D(k) = \not{k} + m. \quad (176)$$

Feltéve, hogy egy Klein-Gordon osztónk van, a propagátorokra kapjuk

$$\begin{aligned} G^{ra}(k) &= \frac{D(k)}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}, \\ G^{ar}(k) &= \frac{D(k)}{(k_0 - i\varepsilon)^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}, \\ iG^{12}(k) &= -n_-(k_0)D(k)\varrho(k), \\ iG^{21}(k) &= (1 - n_-(k_0))D(k)\varrho(k), \\ iG^{rr}(k) &= \left(\frac{1}{2} - n_-(\omega_k)\right)D(k)\varrho(k), \\ G^{11}(k) &= \frac{D(k)}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} + iD(k)(n_-(k_0) - \Theta(-k_0))\varrho(k), \\ G^{22}(k) &= \frac{D(k)}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} - iD(k)(n_-(k_0) - \Theta(-k_0))\varrho(k), \\ G^{33}(k) &= \frac{D(k)}{k_0^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2} \quad (k_0 = (2n + 1)\pi T). \end{aligned} \quad (177)$$

Ezután írhatjuk a pályaintegrálra, hogy

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{i\Psi^\dagger \mathcal{K} \Psi + J\Psi + J^\dagger \Psi^\dagger} = \int \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{i(\Psi + i\mathcal{K}^{-1}J^\dagger)^\dagger \mathcal{K}(\Psi + i\mathcal{K}^{-1}J^\dagger) + iJ^\dagger \mathcal{K}^{-1}J} = e^{iJ^\dagger \mathcal{K}^{-1}J} \int \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{i\Psi^\dagger \mathcal{K} \Psi}, \quad (178)$$

ahol felhasználtuk, hogy \mathcal{K} önadjungált. Az invertálásnál itt is figyelni kell a határfeltételekre, de igaz az, hogy

$$iG_{\Psi\Psi^\dagger}(x) = \langle \text{Tr}_c \Psi(x)\Psi^\dagger(0) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J^\dagger(0)} \Big|_{J=0} = \langle \text{Tr}_c \Psi(x)\Psi^\dagger(0) \rangle = i\mathcal{K}^{-1}(x), \quad (179)$$

így itt is a fenti propagátor-mátrixot használhatjuk:

$$Z[J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}] = Z_0 \exp\left(\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} J^{(a)\dagger}(k) G^{ab}(k) J^{(b)}(k)\right), \quad Z_0 = \int \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{i\Psi^\dagger \mathcal{K} \Psi}. \quad (180)$$

Még hátra van a Z_0 kiszámításához 1D (diagonális) esetben:

$$\int d\Psi^\dagger d\Psi e^{-a\Psi^\dagger \Psi} = a, \quad (181)$$

ezért általános esetben

$$Z_0 = \det \mathcal{K}_E \quad \Rightarrow \quad F = -T \ln Z_0 = -T \ln \det \mathcal{K}_E = -T \text{Tr} \ln \mathcal{K}_E. \quad (182)$$

A konkrét számításához ugyanazt a trükköt alkalmazzuk, mint korábban, csak most $M \rightarrow M + a$ módon. Ekkor

$$\frac{\partial Z_0}{\partial a} = - \int_0^\beta d\tau \int d^3 \mathbf{x} \sum_\alpha \int \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi \Psi_\alpha^\dagger(\tau, \mathbf{x}) \Psi_\alpha(\tau, \mathbf{x}) e^{-S_E} = \beta V Z_0 \sum_\alpha \langle \Psi(0)\Psi^\dagger(0) \rangle = \beta V Z_0 i \text{Tr} G^{rr}(x=0). \quad (183)$$

A szabadenergia innen

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -i \text{Tr} G^{rr}(x=0). \quad (184)$$

Felhasználva a G^{rr} alakját (l. (177)) írhatjuk

$$\begin{aligned} -i \text{Tr} G^{rr}(x=0) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i) \text{Tr} G^{rr}(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{2} + n_-(k_0)\right) 2\pi \text{Tr} \sum_{\lambda} P_{\lambda} \delta(k_0^2 - \omega_{\lambda}^2) = \\ &= \sum_{\lambda} N_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{2} + n_-(\omega_{\lambda})\right). \end{aligned} \quad (185)$$

Innen

$$f(a=\Lambda) - f = \int_0^{\Lambda} da \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{2} + n_-(\omega)\right) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{M_{\mathbf{k}}}^{M_{\mathbf{k}}+\Lambda} d\omega \left(-\frac{1}{2} + n_-(\omega)\right). \quad (186)$$

Innen kapjuk (elhagyva a $\Lambda \rightarrow \infty$ esetén eltűnő járulékokat)

$$f = -T \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Lambda + f(a=\Lambda). \quad (187)$$

Az utolsó két tag állandó, vagyis elhagyható. Ekkor a fizikai szabad energiára kapjuk

$$F = fV = -TV \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}). \quad (188)$$

A nyomás, illetve belső energia:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = T \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}), \quad E = \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} = V \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} n_-(\omega_{\mathbf{k}}). \quad (189)$$

Speciális esetekben ez ki is számítható. Klasszikus nemrelativisztikus részecskéknél ugyanazt kapjuk, mint korábban. Az ultrarelativisztikus limeszben pedig ($\omega_{\mathbf{k}} = k$)

$$F = -\frac{\pi^2}{90} VT^4, \quad p = \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad E = 3pV. \quad (190)$$

5.5 Perturbációszámítás

Mi a helyzet akkor, ha az elméletünk nem kvadratikus? Kettéválasztjuk a hatást egy kvadratikus és egy magasabb rendű tagokat tartalmazó részre:

$$S = S_0 + S_{\text{int}}, \quad S_0 \sim A^{\dagger} \mathcal{K} A, \quad S_{\text{int}} = \int d^4 x g \mathcal{L}_{\text{int}}(A(x_j)). \quad (191)$$

A g mennyiség a csatolási állandó, \mathcal{L}_{int} pedig a terek lokális polinomja. Várható érték számításakor

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_c A_1(x_1) \dots A_n(x_n) \rangle &= \int \mathcal{D}A A_1(x_1) \dots A_n(x_n) e^{iS_0[A] + iS_{\text{int}}[A]} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \int \left(\prod_{j=1}^n d^4 y_j \right) \int \mathcal{D}A A_1(x_1) \dots A_n(x_n) \left[\prod_{j=1}^n \mathcal{L}_{\text{int}}[A(x_j)] \right] e^{iS_0[A]}. \end{aligned} \quad (192)$$

Így a csatolási állandó szerinti sorfejtett alakban kapjuk meg a választ. Az együtthatókhöz a szabad térelméletbeli többpontfüggvényeket kell kiszámítanunk. A generátorfunkcionál alakja ekkor

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}A e^{iS_0[A] + iS_{\text{int}}[A] + JA} = e^{iS_{\text{int}}[\delta/\delta J]} \int \mathcal{D}A e^{iS_0[A] + JA} = Z_0 e^{iS_{\text{int}}[\delta/\delta J]} e^{iJ^{\dagger} G J} = \\ &= Z_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \left(\int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^n e^{iJ^{\dagger} G J}. \end{aligned} \quad (193)$$

A többpontfüggvények számításánál a folyamat végén $J = 0$ -t kell vennünk. Mivel az $\exp[iJ^\dagger GJ]$ deriváltja $iGJ \exp[iJ^\dagger GJ]$, ezért a $J = 0$ limeszt csak azok a tagok élik túl, ahol az iGJ előtagot is valami deriválja. Éppen ezért a deriválások párokba rendezhetők, végeredményben minden párhoz egy iG faktor fog tartozni.

A fenti formula szerint ezért egy korrelációs függvényt n -edrendben a következőképp számoljuk ki (Feynman szabályok):

- minden korrelálandó (külső) teret egy ponttal jellemzünk.
- felírjuk a kölcsönható Lagrange sűrűséget n különböző pontban (vertexek)
- a vertexeket és a külső tereket párosítjuk, a párosításokat egy vonallal reprezentáljuk. A vertexekből annyi vonal indul ki, ahány teret tartalmaz.
- minden vertexhez egy ig faktort rendelünk, a vonalakhoz iG propagátort. Végül integráljuk az egészet az összes vertex helye szerint.
- Fourier térben az integrálás a propagátorok 4-es impulzusára történik. Ha minden vertex energia- és impulzus őrző (lokális elméletben mindig így van), akkor a végén megmarad egy teljes energia- és impulzus őrző Dirac-delta.

A korábban tárgyalt lecsatolódási tétel miatt vegyes (ahol 12 illetve a 3 kontúr terei keverednek) korrelációs függvények várható értéke nulla. Emiatt vagy csak a 3-as kontúron végezzük a perturbációs számítást, vagy csak az 12 kontúron. Az előbbi az imaginárius idejű vagy Matsubara perturbációs számítás, a második a valós idejű vagy Keldysh perturbációs számítás.

5.5.1 Matsubara elmélet

Ekkor kizárólag a 3-as kontúrt használjuk, ami lehetővé teszi, hogy csupán egyetlen típusú mezőt alkalmazzunk a PI-ban. Ráadásul a PI nem komplex fázist, hanem exponenciális elnyomást tartalmaz, ami biztosítja a konvergenciát. Ugyanakkor csak a C_3 -on tudunk korrelációs függvényeket számolni, vagyis komplex időrendezett operátorszorzatok kiszámítása lehetséges, és az is a $[0, \beta]$ argumentumokra. Minden korrelációs függvény β -ban periodikus illetve antiperiodikus lesz a PI tulajdonságai miatt. Itt tehát a generátor:

$$Z[J] = \int_{\text{(anti)periodikus}} \mathcal{D}A e^{-S_E[A] + JA}, \quad Z_0 = Z[0]. \quad (194)$$

Ez a formalizmus különösen alkalmas termodinamika számítására, hiszen

$$Z_0 = \text{Tr} e^{-\beta H} = e^{-\beta F} \Rightarrow F = -T \ln Z_0. \quad (195)$$

Formailag egyszerű, teljesen analóg a vákuum várható érték Wick forgatás utáni számításával véges időszerű térfogatban.

Hátránya, hogy a véges időtartomány miatt a Fourier-tér integrálok helyett összeadások jönnek be, valós számok helyett egész számokkal kell jellemeznünk a frekvenciákat. Másrészt korrelációs függvényeket csak nemfizikai, imaginárius idő argumentumokra tudjuk kiszámolni.

Javaslat: ha mindenféleképpen Matsubara elméletben akarunk dolgozni, akkor használjunk a G^{33} -ra vegyes reprezentációt:

$$G^{33}(\tau, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-\tau k_0} (1 + \alpha n_\alpha(k_0)) \varrho(k). \quad (196)$$

Szabad reaktivisztikus esetben $\varrho(k) = D(k)2\pi(\delta(k_0 - \omega_k) - \delta(k_0 + \omega_k))/(2\omega_k)$, vagyis $\tau \in [0, \beta]$ esetre

$$\begin{aligned} G^{33}(\tau, \mathbf{k}) &= \frac{1}{2\omega_k} [e^{-\tau\omega_k} (1 + \alpha n_\alpha(\omega_k)) D(\omega_k, \mathbf{k}) - e^{\tau\omega_k} (1 + \alpha n_\alpha(-\omega_k)) D(-\omega_k, \mathbf{k})] = \\ &= \frac{e^{(\beta-\tau)\omega_k} D(\omega_k, \mathbf{k}) + \alpha e^{\tau\omega_k} D(-\omega_k, \mathbf{k})}{2\omega_k} n_\alpha(\omega_k), \end{aligned} \quad (197)$$

ahol felhasználtuk a $1 + \alpha n_\alpha(-\omega) = -\alpha n_\alpha(\omega)$ illetve a $1 + \alpha n_\alpha(\omega) = e^{\beta\omega} n_\alpha(\omega)$ azonosságokat. Ezen felül

$$G^{33}(-\tau, \mathbf{k}) = \alpha G^{33}(\beta - \tau, \mathbf{k}) = \frac{\alpha e^{\tau\omega_k} D(\omega_k, \mathbf{k}) + e^{(\beta-\tau)\omega_k} D(-\omega_k, \mathbf{k})}{2\omega_k} n_\alpha(\omega_k). \quad (198)$$

Ha felhasználjuk a $D(-k) = \alpha D(k)$ egyenletet (ami a spin-statisztika összefüggés következménye), akkor

$$G^{33}(-\tau, \mathbf{k}) = \alpha G^{33}(\tau, -\mathbf{k}). \quad (199)$$

5.5.2 Valós idejű formalizmus

Ebben az esetben kizárólag a $C_{1,2}$ kontúrt tekintjük. A generátorfunkcionál

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A e^{iS_E[A^{(1)}] - iS_E[A^{(2)}] + J^{(1)}A^{(1)} + J^{(2)}A^{(2)}}, \quad Z[0] = 1. \quad (200)$$

A két hatásnak megfelelően minden tér és minden vertex megduplázódik. Az 1-es típusú vertexhez ig , a 2-eshez $-ig$ járulék tartozik. A vonalakhoz a végein található indexeknek megfelelő propagátort rendeljük.

Előnye, hogy nem kell szummákkal foglalkozni, amit a magasabb rendű diagramok számításánál nehéz elvégezni. Közvetlen fizikai jelentése van a kiszámolt mennyiségeknek, analitikus trükkök segítségével egyszerűbb eljárásokat lehet megvalósítani.

Hátránya, hogy két típusú terünk van, valamint hogy a termodinamikával nincs olyan közvetlen viszonyban (valójában az energia számításával itt is lehet termodinamikát értelmezni).

A legtöbb számítást a következőkben a valós idejű formalizmussal fogjuk végezni.

5.6 Φ^4 elmélet

Tekintsük a következő Lagrange függvényt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Phi(-\partial^2 - m^2)\Phi - \frac{\lambda}{24} \Phi^4. \quad (201)$$

A szabad rész a Klein-Gordon elmélettel egyezik, ahol $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$, így a propagátorokat mind ismerjük. A Φ^4 tag generálja a kölcsönhatásokat, az ennek megfelelő vertexből négy vonal indul ki, és $\pm i\lambda/24$ érték tartozik hozzá az 1-es illetve 2-es vertexeknek megfelelően.

Először írjuk fel a két- illetve négy-pont korrelációs függvényhez tartozó Feynman diagramokat (1. 2). A

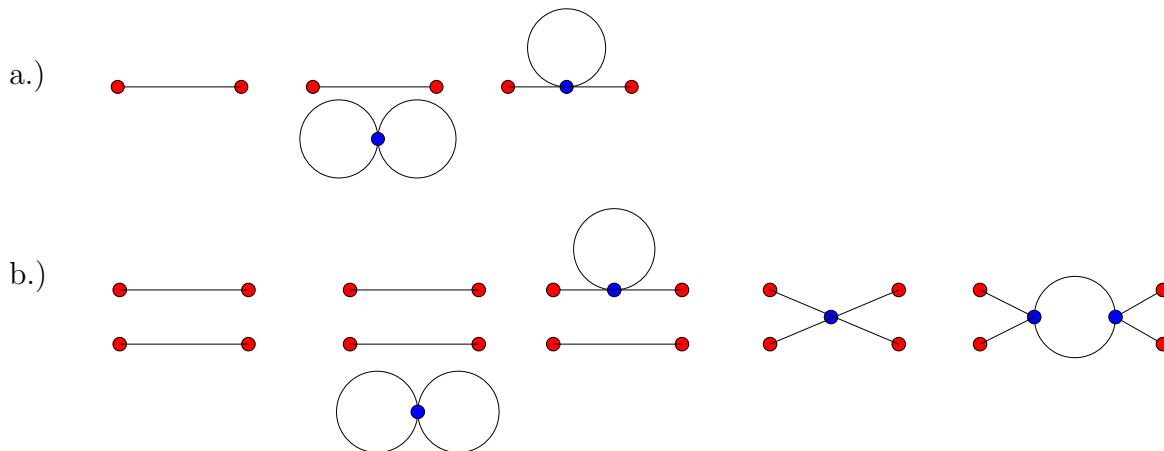


Figure 2: Feynman diagramok a két- és négy-pont függvényekre

külső terekhez és a vertexekhez 1 illetve 2 indexeket kell rendelni.

Láthatóan nagyon sok redundancia van a számolásban. Hogy ezeket kiküszöböljük, az eredeti generátor funkcionál helyett mást kell használnunk. Először is több olyan járulékot látunk, amely több nem összefüggő

rész-diagramból áll. Ezek járuléka az egyes elemek járulékanak szorzata, amelyek egymástól teljesen függetlenül kerülnek kiszámításra. Elég lenne tehát az összefüggő tagokat kiszámítani: ezek generátora legyen $iW[J]$.

Nézzük meg most a generátor funkcionál kiszámítását véges áramok mellett. Ekkor formálisan $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - iJ\Phi$ Lagrange-függvényből kell számolnunk, és itt a 0-pont függvényeket kell felösszegeznünk. A generátor-funkcionál első deriváltjának számításakor 1-pont függvényt kell számolni. Minden egyes diagramnál található olyan rész, amely a külső vonallal összefügg, és olyan, amely attól diszjunkt. A diszjunkt rész azonban tetszőlege 0-pont függvény lehet, vagyis az összefüggő részt rögzítve az összes 0-pont függvény mellette állhat. Ez viszont éppen kiadja az eredeti $Z[J]$ -t. Vagyis:

$$\frac{\delta Z}{\delta J} = i \frac{\delta W}{\delta J} Z \quad \Rightarrow \quad Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (202)$$

Megjegyzés: az összefüggő vákuum diagramok (0-pont függvények) a négyestérfogattal arányos járulékot adnak, imaginárius idő formalizmusban βV járulékot. Több nem összefüggő rész esetén a megfelelő járulék $\sim V^n$. Ezért Z nem extenzív mennyiség, W azonban csak az összefüggő részt tartalmazza, így arányos V -vel. A szabadenergia tehát extenzív lesz. Az összefüggő részekből számolt Z a statisztikus fizikában kumuláns-kifejtésként ismert.

Egy másik fajta redundanciát is megszüntethetünk, ha észrevesszük, hogy az olyan vonalak, amelyek nem részei hurkoknak, rögzített impulzussal rendelkeznek. Ez következik az energia és impulzus megmaradásból. Ha egy ilyen vonalat elvágunk, akkor a diagram két nem összefüggő részre szakad, ezért az olyan diagramokat, ahol előfordulnak nem hurkok részét képző vonalak, 1-részecske reducibilisnek (1PR), az ilyen vonalat nem tartalmazó diagramot 1-részecske irreducibilisnek (1PI) nevezzük. Az 1PR diagramok számítás nélkül megkaphatók az 1PI diagramok ismeretében, jó lenne erre valami formulát levezetni. Jelöljük az 1PI diagramok generátorát Γ -val, neve effektív hatás.

A megfigyelés az, hogy $W[J]$ számításánál a csupasz vonalon lógó diagram rész pontosan olyan, mintha egy 1-pont függvényt számítanánk ki. Γ olyan kell legyen tehát, hogy a belőle számított 1-pont függvények automatikusan, minden J -re nullák kell legyenek. Erre a következő konstrukció lesz alkalmas:

$$i\Gamma[\bar{A}] = iW[J] - \int J\bar{A}, \quad \text{ahol} \quad \bar{A}(x) = i \frac{\delta W}{\delta J(x)}. \quad (203)$$

A J - \bar{A} inverz reláció

$$J(x) = -i \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{A}(x)} \quad (204)$$

Erre felírhatjuk

$$e^{i\Gamma[\bar{A}]} = e^{iW[J] - \int J\bar{A}} = \int \mathcal{D}A e^{iS[A] + \int J(A - \bar{A})} = \int \mathcal{D}A e^{iS[A + \bar{A}] + \int J\bar{A}}. \quad (205)$$

Ebben a formulában J -t mint \bar{A} függvényét kell beírni. Most már be tudjuk bizonyítani, hogy a Γ -ban az 1-pont függvény értéke 0:

$$e^{-\int J\bar{A}} \langle A(x) \rangle = \int \mathcal{D}A A e^{iS[A + \bar{A}] + \int J\bar{A}} = \int \mathcal{D}A (A - \bar{A}) e^{iS[A] + \int J\bar{A}} = \frac{\delta Z}{\delta J} - \bar{A}Z = Z \left[i \frac{\delta W}{\delta J} - \bar{A} \right] = 0. \quad (206)$$

A fenti formula lehetőséget nyújt a Γ egyszerű kiszámítására:

$$e^{i\Gamma[\bar{A}]} = \int \mathcal{D}A e^{iS[A + \bar{A}]} \Big|_{\langle A \rangle = 0}. \quad (207)$$

Ez a formula a háttérmező módszer alapegyenlete: vagyis Γ úgy számítható ki, hogy eltoljuk a kvantumtereket valamilyen háttérrel, és az így kapott hatást (ill. kezdeti feltételeket) a $\langle A \rangle = 0$ feltétel mellett értékkeljük ki.

Ha eltekintünk a kvantum és statisztikus fluktuációktól, akkor $\langle A \rangle = 0$ helyett $A = 0$ írható, amely azt adja, hogy

$$e^{i\Gamma[\bar{A}]} = \varrho[\bar{A}] e^{iS[\bar{A}]} + \text{flukt.} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = S + \text{kezd.felt.} + \text{flukt.} \quad (208)$$

Az effektív hatás a fluktuációk nélküli elméletben tehát a klasszikus hatást adja vissza a kezdőfeltételekkel.

Másrészt a fizikai várható értékeket végülis $J = 0$ mellett kell kiszámolnunk (l. (88)). Ez azt jelenti, hogy \bar{A} fizikai értékére felírhatjuk

$$iJ = \left. \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{A}} \right|_{\bar{A}^{phys}} = 0, \quad (209)$$

ami azt jelenti, hogy a mozgásegyenletet a klasszikus hatás helyett az effektív hatás generálja.

Megjegyzés: az áramok illetve háttérmező szerinti kifejtésben

$$W[J] = \sum_n \frac{1}{n!} W_{i_1 \dots i_n}^n J_{i_1} \dots J_{i_n}, \quad \Gamma[\bar{A}] = \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma_{i_1 \dots i_n}^n \bar{A}_{i_1} \dots \bar{A}_{i_n}. \quad (210)$$

5.6.1 \hbar -kifejtés

Hogy lássuk, mi a klasszikus és kvantum korrekció, írjuk vissza a \hbar -t a formulákba. A következő helyettesítéseket kell megtenni

$$H \rightarrow \frac{H}{\hbar}, \quad S \rightarrow \frac{S}{\hbar}, \quad W \rightarrow \hbar W, \quad \Gamma \rightarrow \frac{\Gamma}{\hbar}. \quad (211)$$

Vizsgáljuk az összefüggő gráfok generátorát (W), és jelöljük szimbolikusan a kvadratikus tagot a hatásban AKA -val, a kölcsönhatást $g_c A^c$ -nel (az egyszerűség miatt csak egyfajta kölcsönhatást teszünk el). Ekkor

$$e^{i\hbar W} = \int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar}(AKA + g_c A^c) + JA} \sim \int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar}(AKA + g_c \hbar^{c/2-1} A^c) + \sqrt{\hbar} JA}, \quad (212)$$

ahol a pályaintegrálban végrehajtottuk a $A \rightarrow \sqrt{\hbar} A$ változóhelyettesítést. Innen a perturbációs számítás szerint:

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle_{conn} = \hbar^{-n/2+1} \frac{\delta^n iW}{\delta J_1 \dots \delta J_n} = \hbar^{-n/2+1} \sum_v (g_c \hbar^{c/2-1})^v W_{1\dots n}^{v,n} = \sum_v g_c^v \hbar^{c/2-1})^v W_{1\dots n}^{v,n}, \quad (213)$$

ahol v a vertexek száma.

Tekintsünk most egy diagramot, ahol v vertex van, n külső vonal és k belső vonal. Ezekre összefüggés: $cv = n + 2k$, mert a vertexekből kiinduló vonalak (cv) vagy a külső vonalakba futnak, vagy a belsőkbé, azonban a belső vonalak két vertexet kötnek össze. Megvizsgálhatjuk azt is, hogy mennyi integrál marad a diagramban: vertexenként egy energia-impulzus megmaradásunk van, minden belső vonalra egy integrálunk van, és a teljes diagramban kell maradjon egy energia-impulzus megmaradás a külső impulzusokra. Ezért a megmaradó integrálok száma (hurkok száma) $\ell = k - v + 1$. A fentiek miatt:

$$\ell = \left(\frac{c}{2} - 1\right)v - \frac{n}{2} + 1, \quad (214)$$

ami mindig pozitív kell legyen. Vagyis v helyett ℓ -re átírva a szummát

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle_{conn} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \hbar^{\ell} g_c^v W_{1\dots n}^{\ell,n}, \quad v = \frac{2\ell + n - 2}{c - 2}. \quad (215)$$

Vagyis a hurkok száma szerinti kifejtés megegyezik a \hbar szerinti kifejtéssel.

A 1PI diagramok esetén a fenti gondoltmenet ugyanígy igaz, csak hogy hurok nélküli diagram kizárólag a 2 illetve c -pont függvény esetén lehet 1PI. Ezért, ahogy fentebb is láttuk, S -hez képest minden korrekció kvantum effektus.

5.6.2 1PI diagrammok, sajátenergia

Adjuk meg az 1PI és az összefüggő diagramok közötti kapcsolatot az első néhány esetre:

$$J_i = -i \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{A}_i} \Rightarrow \frac{\delta J_i}{\delta J_k} = \delta_{jk} = -i \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{A}_i \delta\bar{A}_j} \frac{\delta\bar{A}_j}{\delta J_k} = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{A}_i \delta\bar{A}_j} \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{J}_j \delta\bar{J}_k} \Rightarrow \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{A}\delta\bar{A}} G = 1. \quad (216)$$

Mivel Γ vezető rendje S , ezért mindig írható

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{A} \delta A} = \mathcal{K} - \Sigma \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{K} - \Sigma)G = 1, \quad (217)$$

ahol \mathcal{K} a szabad kernel, Σ pedig a kvantumos korrekció. Σ neve sajátenergia. A kétpontfüggvény 1PI felírása ezért (Schwinger-Dyson egyenlet)

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma \quad \Rightarrow \quad G = G_0 + G\Sigma G_0 = G_0 + G_0\Sigma G \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}G = 1 + \Sigma G. \quad (218)$$

Vagyis kétpontfüggvény első kvantumos korrekciója

$$\langle A_i A_j \rangle_{qcorr} = iG_0 \langle A_i A_j \rangle_{amp} iG_0 = iG_0 \Sigma G_0 \quad \Rightarrow \quad \langle A_i A_j \rangle_{amp} = -i\Sigma, \quad (219)$$

ahol $\langle A_i A_j \rangle_{amp}$ az “amputált” kétpontfüggvény (azaz hiányoznak róla a külső vonalak).

Valós idejű formalizmusban Σ egy mátrix lesz; a Keldysh formalizmusban \mathcal{K} diagonális, ezért

$$\mathcal{K}G^{ij} = \delta^{ij} + \Sigma^{ik} G^{kj}. \quad (220)$$

R/A formalizmusban a kernel nem diagonális, hiszen

$$\mathcal{L}_2 = A_1^\dagger \mathcal{K} A_1 - A_2^\dagger \mathcal{K} A_2 = \left(A_r + \frac{A_a}{2} \right)^\dagger \mathcal{K} \left(A_r + \frac{A_a}{2} \right) - \left(A_r - \frac{A_a}{2} \right)^\dagger \mathcal{K} \left(A_r - \frac{A_a}{2} \right) = A_r^\dagger \mathcal{K} A_a + A_r^\dagger \mathcal{K} A_a. \quad (221)$$

Emiatt

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}P \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}G_{R/A} = P + P\Sigma G. \quad (222)$$

Komponensekben, felhasználva, hogy $G^{aa} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}G^{ra} &= 1 + \Sigma^{ar} G^{ra} \\ \mathcal{K}G^{ar} &= 1 + \Sigma^{ra} G^{ar} \\ \mathcal{K}G^{rr} &= \Sigma^{ar} G^{rr} + \Sigma^{aa} G^{ar} \\ 0 &= \Sigma^{rr} G^{ra} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^{rr} = 0. \end{aligned} \quad (223)$$

Vagyis az R/A formalizmusban a retardált illetve avanszált propagátorok sajátenergiás egyenlete diagonális.

A Keldysh és R/A sajátenergiák összefüggése

$$\mathcal{K}G^{ra} = \mathcal{K}(G^{11} - G^{12}) = 1 + \Sigma^{11} G^{11} + \Sigma^{12} G^{21} - \Sigma^{11} G^{12} - \Sigma^{12} G^{22} = 1 + (\Sigma^{11} + \Sigma^{12}) G^{ra} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^{ar} = \Sigma^{11} + \Sigma^{12}. \quad (224)$$

Hasonlóan

$$\Sigma^{ra} = \Sigma^{11} + \Sigma^{21}, \quad \Sigma^{aa} = \frac{\Sigma^{12} + \Sigma^{21}}{2}, \quad \Sigma^{rr} = 0 = \Sigma^{11} + \Sigma^{22} + \Sigma^{12} + \Sigma^{21}. \quad (225)$$

Ezen felül, valós időben felírva a G^{ra} egyenletét:

$$\mathcal{K}G^{ra}(t) = \delta(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Sigma^{ar}(t-t') G^{ra}(t'). \quad (226)$$

Mivel azonban $G^{ra}(t) = \Theta(t)g(t)$, emiatt a sajátenergiára

$$\Sigma^{ar}(t) = \Sigma_0 \delta(t) + \Sigma_1(t) \Theta(t). \quad (227)$$

Fourier-térbe visszaírva ez azt jelenti, hogy

$$\Sigma^{ar}(k) = \Sigma_0 + \tilde{\Sigma}(k), \quad \tilde{\Sigma}(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-\text{Disc } \Sigma_{ar}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\varepsilon}. \quad (228)$$

A retardált sajátenergia tehát vagy valós, vagy kauzális. A kauzális rész kifejezése a Keldysh sajátenergiákkal

$$\text{Disc } \Sigma^{ar} = \Sigma^{ar} - \Sigma^{ra} = \Sigma^{12} - \Sigma^{21}. \quad (229)$$

A KMS reláció is megfogalmazható a sajátenergiákra. Mivel

$$\begin{aligned} iG^{rr} &= \left(\frac{1}{2} + n\right) (iG^{ra} - iG^{ar}) = \left(\frac{1}{2} + n\right) (iG_0^{ra} - iG_0^{ar} + iG_0^{ra}\Sigma^{ar}G^{ra} - iG_0^{ar}\Sigma^{ra}G^{ar}) = \\ &= iG_0^{rr} + \left(\frac{1}{2} + n\right) G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ra} - \left(\frac{1}{2} + n\right) iG_0^{ar}\Sigma^{ra}G^{ar}. \end{aligned} \quad (230)$$

Ezt összehasonlítva G^{rr} sajátenergiás egyenletével

$$\begin{aligned} iG^{rr} &= iG_0^{rr} + iG_0^{rr}\Sigma^{ra}G^{ar} + G_0^{ra}i\Sigma^{aa}G^{ar} + G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{rr} = \\ &= iG_0^{rr} + \left(\frac{1}{2} + n\right) iG_0^{ra}\Sigma^{ra}G^{ar} - \left(\frac{1}{2} + n\right) iG_0^{ar}\Sigma^{ra}G^{ar} + G_0^{ra}i\Sigma^{aa}G^{ar} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + n\right) G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ra} - \left(\frac{1}{2} + n\right) G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ar} = \\ &= iG^{rr} + \left(\frac{1}{2} + n\right) iG_0^{ra}\Sigma^{ra}G^{ar} + G_0^{ra}i\Sigma^{aa}G^{ar} - \left(\frac{1}{2} + n\right) G_0^{ra}\Sigma^{ar}iG^{ar}. \end{aligned} \quad (231)$$

Emiatt

$$i\Sigma^{aa} = \left(\frac{1}{2} + n\right) (i\Sigma^{ar} - i\Sigma^{ra}). \quad (232)$$

5.6.3 1PI diagrammok, vertexfüggvények

A hárompontfüggvényre kapjuk, a (216) egyenlet deriválásával:

$$\frac{\delta\Gamma_{ij}}{\delta A_k} \frac{\delta A_k}{\delta J_{k'}} G_{jj'} + \Gamma_{ij'} \frac{\delta G_{j'j}}{\delta J_{k'}} = 0 \quad \Rightarrow \quad G_{ijk} = G_{ii'} G_{jj'} G_{kk'} \Gamma_{i'j'k'}, \quad (233)$$

vagyis az “amputált” hárompontfüggvényt kapjuk.

Következő rendben

$$\begin{aligned} G_{ijkl} &= G_{ii'} G_{jj'} G_{kk'} \Gamma_{i'j'k'} + \dots + G_{ii'} G_{jj'} G_{kk'} G_{\ell\ell'} \Gamma_{i'j'k'\ell'} = \\ &= G_{ii'} G_{jj'} \Gamma_{i'j'k'} G_{k'a} \Gamma_{abc} G_{bk} G_{c\ell} + \dots + G_{ii'} G_{jj'} G_{kk'} G_{\ell\ell'} \Gamma_{i'j'k'\ell'}. \end{aligned} \quad (234)$$

Vagyis “fa gráfokból” rakjuk össze az összefüggő digrammokat, ahol a vertexek helyett most a felöltöztetett “proper” vertexeket kell betenni, ami nem más mint $\Gamma^n(k_1, \dots, k_n)$.

5.7 1PI diagramok Φ^4 elméletben

5.7.1 Tadpole diagram

Konkrétan számítsuk ki a Φ^4 elméletben egy hurok szinten felmerülő 1PI diagramokat véges hőmérsékleten. A kétpontfüggvény esetében egyetlen diagramunk marad, a lokális

$$\left\langle \Phi^{(1)}(x) \Phi^{(1)}(x) \right\rangle_{amp} \Rightarrow \frac{-i\lambda}{24} \langle \Phi \Phi \Phi' \Phi' \Phi' \Phi' \rangle = \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG^{(11)}(k) = -i\Sigma^{11}. \quad (235)$$

Ugyanemiatt $\Sigma^{12} = \Sigma^{21} = 0$. Ez azt is jelenti, hogy $\Sigma^{ar} = \Sigma^{ra} = \Sigma^{11} = -\Sigma^{22}$.

Mivel a fenti kifejezés valós időben az $x = 0$ helyen vett értéket jelenti, valamint

$$G^{ra}(x=0) = G^{ar}(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad G^{11}(x=0) = G^{rr}(x=0). \quad (236)$$

Ezt már kiszámoltuk (155) alatt:

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega} (1 + 2n_+(\omega)). \quad (237)$$

Jól láthatóan ez a tag divergens integrált ad. Hogy ki tudjuk számolni az értékét, valamilyen módon regularizálni kell az integrálokat. Fizikai regularizáció, ha az impulzust nem engedjük tetszőlegesen nagyra nőni, $|\mathbf{k}| < \Lambda$ impulzus levágást (cut-off) alkalmazunk, de feltesszük, hogy Λ nagyobb minden fizikai skálánál. Az integrál ekkor

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{dk k^2}{\omega_k} + \int_0^\infty \frac{dk k^2}{\omega_k} n(\omega_k) \right] = \frac{\lambda}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 + m^2 \ln \frac{m}{2\Lambda} \right] + \frac{\lambda T^2}{4\pi^2} \int_{\beta m}^\infty dx \frac{\sqrt{x^2 - (\beta m)^2}}{e^x - 1}. \quad (238)$$

Láthatóan az első, divergens tag nem függ a hőmérséklettől, a második, hőmérsékletfüggő tag nem függ a levágástól. E második tagot (a $\lambda/2$ nélkül) nevezzük tadpole (ebihal) járuléknak:

$$\Sigma_0 = \Sigma_0^{div} + \frac{\lambda}{2} \mathcal{T} \quad \mathcal{T} = \frac{T^2}{2\pi^2} \int_{\beta m}^\infty dx \frac{\sqrt{x^2 - (\beta m)^2}}{e^x - 1} = T^2 \bar{\mathcal{T}}(\beta m). \quad (239)$$

Ha $\beta m \rightarrow 0$, azaz ha $T \gg m$, akkor $\bar{\mathcal{T}}(0) = 1/12$. Ha $\beta m \rightarrow \infty$, azaz nulla hőmérsékleten vagy nagyon nagy tömeg esetén $\bar{\mathcal{T}}(\infty) = 0$.

A divergens tag kiszámítására többféle módszert is használhatunk, ezeknek csak egyike az energia-impulzus levágás. Alternatív lehetőség a tér diszkretizálása (l. szilárd test), ez azonban relativisztikusan invariáns rendszerekben a relativisztikus invariancia megsértéséhez vezet. A szimmetriákat legjobban őrző regularizálási módszer az, ha az integrálokat nem 4, hanem $4 - 2\varepsilon$ dimenzióban számoljuk ki (dimenziós regularizáció). Ekkor valahány integrál elvégzése után forgásinvariáns integrandusunk lesz, itt a következő formulák alkalmazhatók

$$\begin{aligned} \int d^d p &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int dp p^{d-1} \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} &= \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \int dp p^{d-1} \\ \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{d-2\varepsilon} p}{(2\pi)^{d-2\varepsilon}} &= \frac{2(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2 - \varepsilon)} \int dp p^{d-1-2\varepsilon} = \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2 - \varepsilon)} \int dz z^{d/2-\varepsilon-1}, \end{aligned} \quad (240)$$

ahol az utolsó tagban végeztünk egy $z = p^2$ helyettesítést. Az első integrál bizonyítása:

$$\begin{aligned} \int d^d p e^{-p^2/2} &= \left(\int_{-\infty}^\infty dp e^{-p^2/2} \right)^d = (2\pi)^{d/2} = K^d \int_0^\infty dp p^{d-1} e^{-p^2/2} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x = p^2/2 \\ p = (2x)^{1/2} \\ dx = p dp \end{array} \right\} = 2^{d/2-1} K^d \int_0^\infty dx x^{d/2-1} e^{-x} = 2^{d/2-1} K^d \Gamma(d/2). \end{aligned} \quad (241)$$

Az utolsó kifejezésben megjelenik egy μ mennyiség: ennek oka az, hogy bár $4 - 2\varepsilon$ dimenzióban számolunk, az integrandus dimenzióját nem változtathatjuk, vagyis valaminek dimenziótlanítania kell a felesleges 2ε dimenziót. Ezért μ tömeg dimenziójú mennyiség, de amúgy tetszőlegesen választható. Ezen dimenziós skála megjelenése elkerülhetetlen következménye a divergenciák jelenlétének (levágás esetén maga a levágás jelenti a skálát).

Az egyik leggyakrabban előforduló integrál:

$$\int_0^\infty dz z^{a-1} (M^2 + z)^{-b} = (M^2)^{a-b} \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \quad (242)$$

Ezen felül a gamma függvények tulajdonságai:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} dx x^{z-1} e^{-x} \\
\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\
\Gamma(1) &= \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \\
\Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \varepsilon \left(\frac{\gamma_E^2}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right) \\
\Gamma(-1+\varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 - \varepsilon \left(1 - \gamma_E + \frac{\gamma_E^2}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right)
\end{aligned} \tag{243}$$

Végül a végén $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén alkalmazható kifejtés

$$X^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln X} = 1 + \varepsilon \ln X + \frac{\varepsilon^2}{2} (\ln X)^2. \tag{244}$$

A tadpole diagramban a (237) egyenletből kiindulva írhatjuk

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^{2\varepsilon}}{2} \int \frac{d^{3-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{3-2\varepsilon}} (p^2 + m^2)^{-1/2} &= \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{2(4\pi)^{3/2}\Gamma(3/2-\varepsilon)} \int_0^{\infty} dz z^{1/2-\varepsilon} (z+m^2)^{-1/2} = \\
&= \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{2(4\pi)^{3/2}\Gamma(3/2-\varepsilon)} (m^2)^{1-\varepsilon} \frac{\Gamma(-1+\varepsilon)\Gamma(3/2-\varepsilon)}{\Gamma(1/2)} = \frac{m^2}{16\pi^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \Gamma(-1+\varepsilon) = \\
&= \frac{m^2}{16\pi^2} \left(1 - \varepsilon \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 \right) = \frac{m^2}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right).
\end{aligned} \tag{245}$$

Emiatt

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{\lambda}{2} \mathcal{T}. \tag{246}$$

A divergencia helyett egy pólust kaptunk ε -ban, a Λ -független tagok paraméteresen ugyanazok, de más konstansokat kaptunk mellettük. Ez általában igaz a különböző regularizációk esetén: a divergenciák mellett megjelenő konstansok különbözőek lesznek.

A véges hőmérsékletű tagban alacsony és magas hőmérsékletű kifejtést végezhetünk el. Alacsony hőmérséklet esetén $\beta \rightarrow \infty$, ekkor a (239) kifejezésben exponenciálisan elnyomott tagok erejéig

$$\mathcal{T} = \frac{T^2}{2\pi^2} \int_{\beta m}^{\infty} dx \sqrt{x^2 - (\beta m)^2} e^{-x} = \frac{mT}{2\pi^2} K_1(\beta m) \rightarrow \frac{1}{m} \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta m}. \tag{247}$$

Magas hőmérsékleten $\beta \rightarrow 0$, a βm szerinti kifejtés azonban nem egyszerű

$$\mathcal{T} = \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} - \frac{\gamma_E m^2}{8\pi^2} - \frac{m^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{(4\pi T)^2} - 1 \right). \tag{248}$$

Bevezetve $\ln c_b = 1 - 2\gamma_E + 2 \ln 4\pi$ mennyiséget

$$\mathcal{T} = \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} + \frac{m^2}{16\pi^2} \ln \frac{c_b T^2}{m^2}. \tag{249}$$

Bizonyításhoz a vezető tag könnyen kiértékelhető

$$\mathcal{T}(\beta \rightarrow 0) = \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{T^2}{12}. \tag{250}$$

Az első tag onnan jön, hogy kis ω -ra $n(\omega) \approx T/\omega$, azaz (bevezetve $(\beta m y)^2 = x^2 - (\beta m)^2$)

$$\frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^{\beta\Lambda} dy \frac{y^2}{y^2 + 1} = \frac{T^2}{2\pi^2} \left[\beta\Lambda - \frac{\pi}{2}\beta m \right] = \frac{\Lambda T}{2\pi^2} - \frac{mT}{4\pi}. \quad (251)$$

A divergens faktor kiesik a sorfejtés további tagjainak figyelembe vételénél. Érdekesség: ez a tag olyan, mintha 3D terünk lenne...

A magas hőmérsékletű kifejtést beírva a dimenzós regularizáció egyenleteibe:

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda}{2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} \frac{m^2}{16\pi^2} + \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} - \frac{m^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{4\pi T^2}{\mu^2} - \gamma_E \right) \right]. \quad (252)$$

5.7.2 Bubble (buborék) diagram

Most vizsgáljuk a 4-pont függvényeket. Vezető rendben kapjuk

$$\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4) \rangle_{amp} = \frac{-i\lambda}{24} \langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)\Phi^4 \rangle_{amp} \Rightarrow -i\lambda(2\pi)^4 \delta(k_1 + \dots k_4). \quad (253)$$

A következő rendben:

$$\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4) \rangle_{amp} = \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{24} \right)^2 \langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)\Phi^4\Phi'^4 \rangle_{amp}. \quad (254)$$

Fourier térben, a külső impulzusokat $k_1, \dots k_4$ -gyel jelölve

$$-\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [iG(k_1 + k_2 - p)iG(p) + iG(k_1 + k_3 - p)iG(p) + iG(k_1 + k_4 - p)iG(p)]. \quad (255)$$

Láthatóan érdemes bevezetni

$$i\mathcal{I}(k) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} iG(q)iG(p) (2\pi)^2 \delta(k - p - q). \quad (256)$$

Valójában $i\mathcal{I}(k)$ a Φ^2 korrelációs függvényével áll kapcsolatban, vagyis az általános korrelációs függvényekre igaz megállapításokat használhatjuk rá. Emiatt bármely kétpontfüggvény (egyensúlyban) kifejezhető a megfelelő spektrális függvénnyel, ami a $\langle [\Phi^2(x), \Phi^2(0)] \rangle$, kifejezve $iG_{\Phi^2\Phi^2}^{21} - iG_{\Phi^2\Phi^2}^{12}$. Amit tehát ki kell számítanunk:

$$\text{Disc } i\mathcal{I}(k) = \int_{p,q} (iG^{21}(q)iG^{21}(p) - iG^{12}(q)iG^{12}(p)) \delta_k(p+q) = \int_{q,p} \varrho(q)\varrho(p) [(1+n_{p_0})(1+n_{q_0}) - n_{p_0}n_{q_0}] \delta_k(p+q), \quad (257)$$

ahol

$$\int_{p,q} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \quad \delta_k(p+q) = (2\pi)^4 \delta(k - p - q). \quad (258)$$

Szabad esetben felírva a spektrál függvény alakját:

$$\text{Disc } i\mathcal{I}(k) = \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \frac{1}{4\omega_p\omega_q} \left[[(2\pi)\delta(k_0 - \omega_p - \omega_q) - (2\pi)\delta(k_0 - \omega_p - \omega_q)] [(1+n_p)(1+n_q) - n_p n_q] + \right. \\ \left. [(2\pi)\delta(k_0 - \omega_p + \omega_q) - (2\pi)\delta(k_0 + \omega_p - \omega_q)] [(1+n_p)n_q - n_p(1+n_q)] \right] (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (259)$$

Láthatóan $k_0 \rightarrow -k_0$ -ra a kifejezés jelet vált, ezért ezek után elegendő $k_0 > 0$ esettel foglalkozni.

Értelmezés: az első tagok azt írják le, hogy egy k_0 energiájú részecske elbomlik két, tömeghőjén levő részecskére, vagy azokból előáll. A statisztikus faktor a bomlásnál $1 + n$, a keletkezésnél n (bozonok). Nulla hőmérsékleten nincs jelen részecske, ezért kizárólag a bomlás jöhet szóba. Ez a járulékok csak akkor van, ha van elég energia a bomláshoz; mivel $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2} > m$, ezért $k_0 > 2m$ legalább kell ehhez (pontosabban 1. később). A második tagok egy, a hőfürdőből érkező részecske szórását írják le (Landau csillapodás). Ez a tag nincsen nulla hőmérsékleten.

Ennek kapcsán elgondolkodhatunk arról, hogyan is nézhet ki általánosan egy kétpont korrelációs függvény diszkontinuitása. Mindenképpen úgy kapható, hogy $G^{21} - G^{12}$, ami azt jelenti, hogy az első esetben a bal oldali vertex 1, a jobb oldali 2. A bal oldali vertexhez kapcsolódik egy olyan domain, amely kizárólag 1-es vertexeket tartalmaz, a jobb oldalhoz egy olyan, amely kizárólag 2-es vertexeket tartalmaz. A két domain-en belül minden propagátor G^{11} illetve G^{22} , ezek tömeghőjén kívüli propagálást is megengednek. Ha ezen második domainben minden 1-est 2-esre cserélnénk, akkor a járulékok komplex konjugáltját kapnánk.

A két domain közötti propagátorok G^{12} , ezek azonban tartalmaznak egy tömeghőj Dirac-deltát, vagyis valódi (nem virtuális) részecskéket írnak le. A teljes járulékok tehát, ha ℓ közbülső vonalunk van, szimbolikusan

$$\int UV^*(iG_1^{21} \dots iG_\ell^{21} - iG_1^{12} \dots iG_\ell^{12}) = \int UV^* \varrho_1 \dots \varrho_\ell ((1 + n_1) \dots (1 + n_\ell) - n_1 \dots n_\ell). \quad (260)$$

Mivel fel kell írunk az összes lehetséges U -ra és V -re, végeredményben az összes $1 \rightarrow \ell$ átmenetet leíró diagramot figyelembe vesszük, ezt jelöljük $\mathcal{M}_{1,\ell}$ -l. Ezzel a teljes járulékok

$$\text{Disc } iG^{ra} = \sum_\ell \int |\mathcal{M}_{1,\ell}|^2 \varrho_1 \dots \varrho_\ell ((1 + n_1) \dots (1 + n_\ell) - n_1 \dots n_\ell). \quad (261)$$

Ez a képlet vágási szabály néven ismert, mert az összefüggő gráfot ketté kell vágni propagátorok elvágásával, és az elvágott vonalakra kell beírni a fenti képlet szerinti járulékokat. Ha nulla hőmérsékleten vagyunk, akkor marad:

$$\text{Disc } iG^{ra}|_{T=0} = \sum_\ell \int_{\text{spatial}} |\mathcal{M}_{1,\ell}|^2 (2\pi) \delta(k_0 - \omega_1 - \dots - \omega_\ell) \quad (262)$$

(Cutkosky szabály).

A vágási szabályokat $T = 0$ -n könnyen meg lehet érteni a kvantummechanika nyelvén. Legyen S_{pq} a végtelen idejű $|p\rangle \rightarrow |q\rangle$ szórás amplitúdója (S-mátrix). Az összes állapot teljes rendszert alkot, ezért

$$\sum_k S_{pk}^\dagger S_{kq} = \delta_{pq}, \quad (263)$$

az S-mátrix unitér. Felírva

$$S = 1 + iM \quad \Rightarrow \quad (1 - iM^\dagger)(1 + iM) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \text{Im } M = M^\dagger M. \quad (264)$$

Mivel $M^\dagger M$ az átmeneti valószínűségekkel van kapcsolatban, melyet hol szórás amplitúdóként, hol bomlási valószínűségként értelmezhetünk, a fenti egyenlet összekapcsolja a teljes bomlási valószínűséget illetve teljes szórás hatás keresztmetszetet a megfelelő spektrál függvényekkel (optikai tétel).

Nulla hőmérsékleten a bejövő energiának kell fedeznie a közbülső részecskék energiáját, ami azt jelenti, hogy csak $k_0 > \sum_{i=1}^\ell m_i$ energiákon kezd életbe lépni az ℓ -részecskés járulékok. A nulla hőmérsékletű spektrál függvény tehát a legkisebb tömegű közbülső állapot tömegeinek összege alatt nulla, vagyis szélsőséges esetben (ha tömegtelen közbülső állapotok is lehetnek) a fénykúp alatt lesz nulla. Ez másrészt szoros kapcsolatban van a kauzalitással, hiszen egyszerre mérhető (azaz kommutál) minden olyan operátor, amelyek térszerűen vannak elválasztva egymástól. Az újabb és újabb közbülső állapotok a megfelelő tömegű küszöbök felett kezdenek járulékokat adni.

Véges hőmérsékleten a hőfürdőből érkező részecskékkel való szórás miatt bonyolultabb a helyzet. Ekkor a spektrál függvény nem csak a részecske keltést tartalmazza, hanem a szórásokat is, amelyeknek nincsen küszöbük. Emiatt véges hőmérsékleten (végtelen térfogatban) *minden* energián van értéke a spektrál függvénynek! Ez azt is jelenti, hogy minden korrelációs függvény imaginárius része nem nulla tetszőleges energián, azaz nem léteznek stabil részecskék (aszimptotikus állapotok).

Emellett véges hőmérsékleten a feljebb említett homogén 1-es vertex domainekben megjelenhetnek 2-es vertex szigetek (és viszont). Nulla hőmérsékleten az ilyen szigetek megjelenését az energiamegmaradás megtiltja, de véges hőmérsékleten mint spektátor (megfigyelő) folyamatok, melyek függetlenek a fő szórástól, jelen vannak. A vágási szabályok emiatt nulla hőmérsékleten nemcsak a diagram kettévágásából állnak, hanem tetszőlege, egymást nem metsző vagy érintő vonlakkal történő darabolást jelenti.

Visszatérve (259) kiszámításához $k_0 > 0$ esetben: az első két Dirac-deltából csak az egyik marad, a második sor két járuléka ugyanaz, vagyis kapjuk:

$$\begin{aligned} \text{Disc } i\mathcal{I}(k) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{4\omega_p\omega_q} \left[\delta(k_0 - \omega_p - \omega_q)(1 + n_p + n_q) + 2\delta(k_0 - \omega_p + \omega_q)(n_q - n_p) \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\omega_p\omega_q} \left[\delta(k_0 - \omega_p - \omega_q)(1 + n_p + n_q) + 2\delta(k_0 - \omega_p + \omega_q)(n_q - n_p) \right]. \end{aligned} \quad (265)$$

ahol $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$. Új változó

$$x \rightarrow q, \quad q^2 = k^2 + p^2 + 2kpx \quad \Rightarrow \quad pdx = \frac{q}{k}dq, \quad |k-p| < q < k+p, \quad (266)$$

vagyis k, p, q háromszöget alkothat. Emiatt

$$\begin{aligned} \text{Disc } i\mathcal{I}(k) &= \frac{1}{8\pi k} \int_0^\infty dq dp \Theta_\Delta(k, p, q) \frac{pq}{\omega_p\omega_q} \left[\delta(k_0 - \omega_p - \omega_q)(1 + n_p + n_q) + 2\delta(k_0 - \omega_p + \omega_q)(n_q - n_p) \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi k} \int_0^\infty dp \frac{p}{\omega_p} \int_{\omega_-}^{\omega_+} d\omega_q \left[\delta(k_0 - \omega_p - \omega_q)(1 + n_p + n_q) + 2\delta(k_0 - \omega_p + \omega_q)(n_q - n_p) \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi k} \int_m^\infty d\omega \left[\Theta(\omega_+ > k_0 - \omega > \omega_-)(1 + n(\omega) + n(k_0 - \omega)) + \right. \\ &\quad \left. + 2\Theta(\omega_+ > \omega - k_0 > \omega_-)(n(\omega - k_0) - n(\omega)) \right] \end{aligned} \quad (267)$$

ahol $\omega_\pm^2 = (k \pm p)^2 + m^2$. Mindkét theta-függvény ugyanazt adja

$$\begin{aligned} \omega_+ &> |k_0 - \omega| > \omega_- \\ |K^2 - 2k_0\omega| &< 2kp \\ 4K^2\omega^2 - 4K^2k_0\omega + K^4 - 4k^2m^2 &< 0. \end{aligned} \quad (268)$$

A nullpontok helye

$$\Omega^\pm = \frac{1}{2} \left(k_0 \pm k \sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}} \right). \quad (269)$$

Ez akkor valós, ha $K^2 > 4m^2$ vagy $K^2 < 0$. Az egyenlőtlenség megoldása tehát:

$$\begin{aligned} K^2 > 4m^2 &\Rightarrow \Omega_+ > \omega > \Omega_- \\ K^2 < 0 &\Rightarrow \Omega_+ < \omega \quad \text{vagy} \quad \omega < \Omega_- \end{aligned} \quad (270)$$

Miután $\Omega_- < 0$ ha $K^2 < 0$, ezért ez nem ad járulékot az $[m, \infty]$ tartományban. A többi esetben belátható, hogy $K^2 > 4m^2$ esetén $\Omega_- > m$ illetve $K^2 < 0$ esetben $\Omega_+ > m$. Figyelembe véve még azt is, hogy $k_0 - \Omega_+ = \Omega_-$ kapjuk

$$\text{Disc } i\mathcal{I}(k) = \frac{1}{8\pi} \Theta(K^2 > 4m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}} + \frac{1}{4\pi k} (\Theta(K^2 > 4m^2) + \Theta(K^2 < 0)) \int_{|\Omega_-|}^{\Omega_+} d\omega n(\omega). \quad (271)$$

Értelmezés: nulla hőmérsékleten csak az első tag marad, ez megfelel egy küszöbnek (két részecske keltés), és az a fölötti két részecske állapotnak. Véges hőmérsékleten módosul a nulla hőmérsékletű tag együtthatója, valamint megjelenik egy új tag $k_0^2 < \mathbf{k}^2$, vagyis a fénykúp alatt (Landau csillapítás).

Mivel

$$\int d\omega n(\omega) = T \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \quad (272)$$

ezért

$$\text{Disc } i\mathcal{I}(k) = \frac{1}{8\pi} \Theta(K^2 > 4m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}} + \frac{T}{4\pi k} (\Theta(K^2 > 4m^2) + \Theta(K^2 < 0)) \ln \frac{1 - e^{-\beta\Omega_+}}{1 - e^{-\beta|\Omega_-|}}. \quad (273)$$

Néhány határeset

- Kis k_0 -ra a Landau csillapítás alakja

$$\text{Disc } i\mathcal{I}(k_0 \ll k) = \frac{k_0}{4\pi k} n \left(\frac{k}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \right). \quad (274)$$

- Kis k -ra a nulla hőmérsékletű tag korrekciója:

$$\frac{1}{4\pi} \Theta(K^2 > 4m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}} n \left(\frac{k_0}{2} \right). \quad (275)$$

- Magas hőmérsékleten ($\beta \rightarrow 0$) a második tag

$$\frac{T}{4\pi k} (\Theta(K^2 > 4m^2) + \Theta(K^2 < 0)) \ln \left| \frac{k_0 + k\gamma}{k_0 - k\gamma} \right|, \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}}. \quad (276)$$

A valós rész arányos az imaginárius résszel, azaz magas hőmérsékleten T -vel. Mivel a végeredmény dimenziótlan, valaminek dimenziótlanítania kell a hőmérsékletet, ez lehet k_0 , k vagy m . Nulla tömegű esetben azonban a tömeg nem szerepel, vagyis kis impulzusú tartományban szükségszerűen $1/\{k, k_0\}$ jellegű függést kapunk.

A nulla hőmérsékletű tagból számolva a valós részt divergenciát kapunk, hiszen nagy frekvenciákra

$$\text{Disc } i\mathcal{I}(\omega \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{8\pi} \Rightarrow \mathcal{I}_{div} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\text{Disc } i\mathcal{I}(\omega, \mathbf{k})|_{\omega \rightarrow \infty}}{k_0 - \omega + i\varepsilon} = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mu}^{\Lambda} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (277)$$

Hogy a nulla hőmérsékletű rész valós részét megkapjuk, levonhatjuk ezt a tagot, és a véges részt numerikusan számolhatjuk. Azonban megkaphatjuk úgy is, hogy közvetlenül a nulla hőmérsékletű integrált számoljuk. Ekkor nyugodtan vehetjük az 11 propagátort, hiszen (83) alapján $G^{11} = G^{ra} + G^{12}$, azonban $T = 0$ -n $G^{12}(p_0 > 0) = 0$. Vagyis

$$i\mathcal{I}(K, m) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} iG^{11}(p) iG^{11}(k-p) = -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m_p^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 - m_q^2 + i\varepsilon)} \quad (278)$$

A szokásos eljárás az, hogy az időbeli integrálást, amely $[-\infty, \infty]$ határok között megy, elforgatjuk a komplex tengelyre (Wick forgatás), valamint k_0 -nak is imaginárius értékeket veszünk. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 f(k_0) = \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{\infty} dk_0^E f(ik_0^E). \quad (279)$$

$4 - 2\varepsilon$ dimenzióban felírva az integrált

$$\mathcal{I}^\varepsilon(K, m) = -\mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} p}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{1}{(p^2 + m^2)((k-p)^2 + m^2)}, \quad p^2 = p_0^2 + \mathbf{p}^2. \quad (280)$$

A nevezők szorzatát átírjuk közös nevezőre az alábbi azonosság segítségével (Feynman paramterizáció):

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta \dots E^\varepsilon} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \dots + \varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \dots \Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 dx dy \dots dz \frac{\delta(1 - x - y - \dots - z) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \dots x^{\varepsilon-1}}{(Ax + By + \dots + E\varepsilon)^{\alpha+\beta+\dots+\varepsilon}} \quad (281)$$

Az integrálási változót eltolva $p \rightarrow p + kx$ szerint, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\varepsilon(K, m) &= - \int_0^1 dx \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} p}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{1}{(p^2 + K^2 x(1-x) + m^2)} = \\ &= - \int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{16\pi^2 \Gamma(2-\varepsilon)} \int dz z^{1-\varepsilon} (z + K^2 x(1-x) + m^2)^{-2} = \frac{-\Gamma(\varepsilon)}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{K^2 x(1-x) + m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (282)$$

Innen ε szerint kifejtve kapjuk

$$\mathcal{I}^\varepsilon(K, m) = \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \int_0^1 dx \ln \left(\frac{-K^2 x(1-x) + m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right], \quad (283)$$

ahol most már elvégeztük az inverz Wick forgatást. Láthatóan a divergencia itt is a $\ln \Lambda \sim 1/\varepsilon$ megfeleltetés alapján kapható.

Ha $m = 0$ vagy $K^2 = 0$, akkor mindkét esetben $\mathcal{I}^\varepsilon(K, m) \sim \ln m^2, \ln K^2$, vagyis a $K^2, m^2 \rightarrow 0$ esetben logaritmus divergenciát kapunk. A véges hőmérsékletű részből még divergensőbb $\sim T/k$ faktort kapunk a valós részben.

Az x szerinti integrálás elvégezhető analitikusan. Nézzük meg az integrál diszkontinuitását. Ehhez $x = re^{i\varphi}$ rerezentációban

$$\begin{aligned} x > 0: \quad x \pm i\varepsilon &\rightarrow re^{\pm i\varepsilon} \Rightarrow \ln(x + i\varepsilon) - \ln(x - i\varepsilon) = 2i\varepsilon \rightarrow 0 \\ x < 0: \quad x + i\varepsilon &\rightarrow re^{i(\pi-\varepsilon)}, \quad x - i\varepsilon \rightarrow re^{-i(\pi-\varepsilon)}, \Rightarrow \ln(x + i\varepsilon) - \ln(x - i\varepsilon) = 2i(\pi - \varepsilon) \rightarrow 2i\pi. \end{aligned} \quad (284)$$

Emiatt

$$\text{Disc}_{k_0} \ln x = \Theta(-x) 2i\pi \Rightarrow \text{Disc}_{k_0} i \ln(\omega^2 - k_0^2) = 2\pi \text{sgn } k_0 \Theta(k_0^2 - \omega^2). \quad (285)$$

Vagyis az integrál formája

$$\begin{aligned} \text{Disc}_{k_0} i\mathcal{I}^\varepsilon(k) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \text{Disc}_{k_0} i \ln \left(\frac{-K^2 x(1-x) + m^2}{4\pi\mu^2} \right) = \frac{1}{8\pi} \text{sgn } k_0 \int_0^1 dx \Theta(x(1-x)K^2 - m^2) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \text{sgn } k_0 \int_{x_-}^{x_+} dx = \frac{1}{8\pi} \text{sgn } k_0 \Theta(K^2 > 4m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{K^2}}, \end{aligned} \quad (286)$$

ami ugyanaz, mint (271) pozitív k_0 -kra.

5.8 Divergenciák a perturbációszámításban

A fentiek alapján felírhatjuk a Φ^4 modell effektív hatását egy hurok rendben:

$$\begin{aligned} \Gamma[\Phi] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Phi^*(k) (k^2 - m^2 - \Sigma_0) \Phi(k) - \\ &- \frac{1}{24} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \delta(k_1 + \dots + k_4) \Phi(k_1) \dots \phi(k_4) \left[\lambda + \frac{\lambda^2}{2} (\mathcal{I}(k_1 + k_2) + \mathcal{I}(k_1 + k_3) + \mathcal{I}(k_1 + k_4)) \right]. \end{aligned} \quad (287)$$

Az effektív hatásból véges kifejezések vezetnek a fizikai megfigyelhető mennyiségekig, vagyis a fenti kifejezésnek minden (reguláris) konfigurációra végesnek kell lennie. Azonban a klasszikus kifejezésen túli radiatív korrekciók nagyon sok szempontból rosszul viselkednek. Alapvetően kétféle problémát kell kezelünk:

- ultraibolya (UV) divergenciák: a radiatív korrekciókban szereplő integrálok divergensnek, vagyis szigorúan véve nem értelmesek a kontinuum limeszben. Ha egy véges rendszert nézünk, pl. egy kristályrácsot, akkor ugyan végesek a radiatív korrekciók, azonban nagy értékeket vehetnek fel. Emiatt a perturbációs számítás érvényessége kérdőjeleződik meg (hiszen a korrekció nagyobb lehet mint a formálisan vezető rend).
- infravörös (IR) divergenciák, illetve IR érzékenység: bizonyos fizikai paraméterek változtatásával is felléphet olyan helyzet, amikor a perturbatív korrekciók nagyok lehetnek. Ezek mindig olyan helyzetet jeleznek, amikor az akár gyengén kölcsönható rendszer egyre több és több módussal kerül kapcsolatba, így a gyenge kölcsönhatások is felerősödhetnek. Néhány prototípus ezek közül:
 - tömeghéjon propagáló részecske propagátora is IR divergens: ezt a sajátenergiás járulékokat felösszegző 1PI formalizmus oldja meg. Fizikailag a tömeghéjon propagáló részecske sokáig él, azaz sok kölcsönhatásra van módja.
 - ha a hőmérséklet nagy, akkor az egy hurok relatív tömeg korrekció $\sim \lambda T^2/m^2$, az egy hurok relatív csatolási állandó korrekció $\sim \lambda T/m$. Ha tehát $T \gg m/\sqrt{\lambda}$, illetve $T \gg m/\lambda$, akkor az egy hurok korrekciók nagyobbak a vezető rendnél. Fizikailag a nagy hőmérséklet sok nagy energiás módust jelent a hőfűrdőben, vagyis sok potenciálisan kölcsönható módust.
 - ha nulla tömegű elméletünk van $T = 0$ -n, akkor az impulzus nullához tartásával $\sim \ln k$ jellegű divergenciákat kapunk. Ugyanígy ha az impulzus nulla, a tömeg nullához tartásával jelennek meg $\sim \ln m$ jellegű divergenciák. Véges hőmérsékleten még erősebb, $\sim T/k$ jellegű divergenciák léphetnek fel. Fizikailag a nulla tömegű kis impulzusú részecskék nagyon kis energiabefektetéssel kelthetők, így nagyon sok módus van jelen a hőfűrdőben.
 - ha nulla tömeggel kölcsönhatásban levő véges tömegű részecskét tekintünk, akkor a tömeghéjon a sajátenergiában is várunk logaritmikus vagy erősebb divergenciát. Ennek oka, hogy a tömeghéjon propagáló részecske sokáig él, vagyis sok nulla tömegű gerjesztéssel léphet kapcsolatba.
 - a Bose-eloszlás kis energián $n(\omega) \sim T/\omega$, azaz divergens. Oka a nulla tömegű bozonok kollektív viselkedése.
 - két részecske közel azonos impulzussal propagálva divergenciához vezethet: ennek oka, hogy sokáig propagálnak egymás mellett, ami sok kölcsönhatásra ad lehetőséget.

6 A perturbációs sor átrendezései: renormálás és felösszegzés

Először foglalkozunk az UV divergenciákkal. Először állapítsuk meg néhány tulajdonságát a kiszámolt példák alapján

- a tömeghez $\sim \Lambda^2$ valamint $\sim m^2 \ln \Lambda$, a csatolási állandóhoz $\sim \ln \Lambda$ divergenciát kaptunk.
- a divergenciák lokálisak voltak
- a divergenciák nem függtek a hőmérséklettől.

Ezen tények miatt a következő heurisztikusnak tűnő eljárást követhetjük. Az effektív hatásnak végesnek kell lennie, mert ez írja le a fizikát. A klasszikus hatás azonban semmit nem ír le, ez csak egy kiinduló alak a perturbációs számításban. Emiatt nincs okunk feltételezni, hogy paraméterei, nevezetesen m^2 és λ , végesek. Valóban, ha megengedünk végtelen értékeket, az effektív hatásban kiküszöbölhetjük a végteleneket.

Hogy ezt lássuk, vezessük be a

$$m_{ren}^2 = m^2 + \lambda \bar{\Sigma}_0^{div}, \quad \lambda_{ren} = \lambda + \frac{3\lambda^2}{2} \mathcal{I}^{div} \quad (288)$$

renormált mennyiségeket, ahol a “div” indexek a divergens részeket jelentik, és $\bar{\Sigma}_0$ a λ nélküli részt jelenti. Ha ezeket végezzük, ami azt jelenti, hogy m^2 és λ végtelenek, akkor a teljes egy hurok járulék véges lesz $\mathcal{O}(\lambda^2)$

relatív rendig, ami már a két hurok korrekciók világába tartozik. Kérdés persze, hogy mit jelent a “divergens rész”. Jelentheti pl. az $1/\varepsilon$ -nal arányos részeket, vagyis konkrét esetben:

$$m_{ren}^2 = m^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \lambda_{ren} = \lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (289)$$

Az egy hurok rendben még van m^2 és λ , emiatt szigorúan véve nem végesek. Azonban pl. a sajátenergia esetén

$$\begin{aligned} m^2 + \lambda \bar{\Sigma}_0(m^2, T) &= m_{ren}^2 + \left(\lambda_{ren} - \frac{3\lambda^2}{2} \mathcal{I}^{div}\right) [\bar{\Sigma}_0(m_{ren}^2 - \lambda \bar{\Sigma}_0^{div}, T) - \bar{\Sigma}_0^{div}(m_{ren}^2 - \lambda \bar{\Sigma}_0^{div})] = \\ &= m_{ren}^2 + \lambda_{ren} [\bar{\Sigma}_0(m_{ren}^2, T) - \bar{\Sigma}_0^{div}(m_{ren}^2)] + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (290)$$

Ez azt jelenti, hogy a végtelenek magasabb, jelen esetben $\mathcal{O}(\lambda^2)$ rendre tolódtak.

Ezt az eljárást hívjuk renormálásnak, mikor a Lagrange-függvényben szereplő paramétereket átértelmezve (végtelen faktorokkal) végeredményben véges eredményhez jutunk.

Formálisan ezt a gondolatot a következőképp lehet végigvinni a perturbációs számításban. A klasszikus Lagrange-függvényt két rész összegeként állítjuk elő: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$, az első már a renormált értékeket tartalmazza, a másodikban a divergens ellentagok (counterterms) találhatóak, ezek formálisan a csatolási állandóban magasabb rendűek. Emiatt csak abban a rendben kerülnek felhasználásra, amely megfelel az adott ellentag-rész csatolási állandó hatványának, és ott semlegesíti a divergenciákat. Néhány megjegyzés ezzel kapcsolatban

- A Lagrange-függvényben perturbációnak tekintjük azokat a tagokat, amelyek bár végtelenhez tartanak, de a renormált csatolási állandóban magasabb rendűek. Ezt tekinthetjük az elmélet inkonzisztenciájának, azonban a végeredményben minden fizikai mennyiség véges lesz minden rendben (l. később), vagyis az eredményül kapott sorok már a szokásos értelemben is perturbációs sorok.
- A renormálási gondolat csak akkor működőképes, ha minden divergencia olyan alakú, mint a klasszikus Lagrange-függvény. Ha más korrelációs függvény is divergensnek bizonyul, akkor a Lagrange-függvényt ki kell egészítenünk azzal a taggal, amelyik ezt semlegesíteni tudja, és az egész számolást el kell végeznünk, ezt az új tagot is belevéve. Akkor beszélünk renormálható elmületről, ha ez az eljárás konvergens, azaz a Lagrang-függvény csak véges sok tagot tartalmaz.
- A renormálás során impulzusfüggő tagokhoz is kell ellentagokat felvenni (l. később), például $\sim \Phi \partial^2 \Phi$ -hez. Ennek az együtthatója azonban az eredeti, klasszikus Lagrange függvényben 1! Hogy ezt is flexibilissé tegyük, a kvantum tér normálását kell megváltoztatnunk, vagyis $\Phi^2 \rightarrow Z\Phi^2$ átskálázást kell végrehajtanunk. Ezt hívjuk hullámfüggvény renormálásnak.

Nézzük meg Φ^4 elmélet esetén hogyan megy a renormálás. Az eredeti, klasszikus Lagrange-függvény alakja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_0)^2 - \frac{m_0^2}{2}\Phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{24}\Phi_0^4. \quad (291)$$

Az itt szereplő terek korrelációs függvényeit nem lehetne végessé tenni a csatolási állandók hangolásával, szükség van a hullámfüggvény renormálására is: $\Phi_0^2 = Z\Phi^2$, ezzel

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m_b^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_b}{24}\Phi^4, \quad m_b^2 = Zm_0^2, \quad \lambda_b = Z^2\lambda_0. \quad (292)$$

A “b” indexű mennyiségek a bare (csupasz) csatolási állandók. Ha Z , m_b és λ_b faktorokat megfelelően választjuk a levágás illetve ε függvényében, akkor innen már véges elmülethez juthatunk. Perturbációs számításban a fenti alakból renormált részt + ellentagokat csinálunk

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m_{ren}^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_{ren}}{24}\Phi^4 + \frac{\delta Z}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{\delta m^2}{2}\Phi^2 - \frac{\delta \lambda}{24}\Phi^4, \quad (293)$$

ahol $\delta Z = Z - 1$, $\delta m^2 = m_b^2 - m_{ren}^2$, $\delta \lambda = \lambda_b - \lambda_{ren}$, s ezek formálisan magasabb rendűek a csatolási állandó kifejtés szempontjából, mint a vezető rendek, azaz

$$\delta Z = \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \delta Z_\ell, \quad \delta m^2 = \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \delta m_\ell^2, \quad \delta \lambda = \lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \delta \lambda_\ell. \quad (294)$$

Hogy az ellentagokat, illetve valamely megfigyelhető mennyiség véges értékét meghatározzuk, a következő stratégiát követjük:

- Először bevezetünk valamilyen *regularizációt* az elméletben, amellyel számolva már véges integrálokat kapunk.
- Ezután rendről rendre felírjuk az összes Feynman gráfot tetszőleges korrelációs függvényhez. Ez függvénye lesz a renormált paramétereknek, valamint az addig a rendig szóba jövő ellentag-részeknek.
- Az ellentagokat úgy választjuk meg, hogy az adott rend véges legyen. Hogy ez megtehető, azt demonstrálni fogjuk a későbbiekben. A legalacsonyabb rendben csak a legelső ismeretlen ellentagok fordulnak elő, így azokat onnan meg tudjuk határozni. Tegyük fel most, hogy valahányadik rendig meghatároztuk az ellentagokat. Egy adott rendű járuléka függ az alacsonyabb rendű ellentagoktól, valamint az adott rend új ellentagjaitól is. Mivel az előbbieket már ismerjük, feltételezésünk szerint, az új ellentagok meghatározhatók.
- Az ellentagok megválasztása nem egyértelmű, hiszen ha pl. $\delta\lambda_1$ eltünteteti a divergenciákat az adott rendben, akkor $\delta\lambda_1 + \Delta\lambda_1$ is megteszi ugyanezt, ha $\Delta\lambda_1$ véges. Ez összefüggésben van a bizonytalansággal, ahogyan egy gráf "végtelen részét" definiáljuk. Az ellentagok kijelölésének mikéntje adja meg a *renormálási sémát*; azaz egyik sémából a másikba úgy térhetünk át, ha megadjuk a véges különbségeket minden rendben. Pl. a Φ^4 modell sajátenergiájának meghatározásakor nulla hőmérsékleten írhatjuk (l. (246))

$$\Sigma_0 = m_{ren}^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \delta m_1^2. \quad (295)$$

Három különböző séma népszerű (de persze bármely más is megtenné).

$$\begin{aligned} \text{MS:} \quad \delta m_1^2 &= \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \Sigma_0^{\text{MS}} = m_{ren}^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2} \left(\gamma_E - 1 + \ln \frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2} \right) \\ \overline{\text{MS}}: \quad \delta m_1^2 &= -\frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 - \ln(4\pi) \right] \Rightarrow \Sigma_0^{\overline{\text{MS}}} = m_{ren}^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2} \ln \frac{m_{ren}^2}{\mu^2} \\ \text{OM:} \quad \delta m_1^2 &= -\Sigma_0^{1\text{-hurok}} \Rightarrow \Sigma_0^{\text{OM}} = m_{ren}^2. \end{aligned} \quad (296)$$

Hasonlóképpen a csatolási állandó esetére

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)} &= \lambda + \delta\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi \right] + \frac{\lambda^2}{2} [\mathcal{I}_{fin}(k_1 + k_2) + \mathcal{I}_{fin}(k_1 + k_3) + \mathcal{I}_{fin}(k_1 + k_3)] \\ \Rightarrow \delta\lambda^{MS} &= \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \delta\lambda^{\overline{\text{MS}}} = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right]. \end{aligned} \quad (297)$$

- A renormált mennyiségek meghatározásának módja a *renormálási előírás* (renormalization prescription). Lehet egyszerűen megadni az értékeket, de lehet bizonyos megfigyelhető mennyiségekből származtatni ezeket. Mondhatjuk pl. azt Φ^4 modellben, hogy

$$G^{-1}(T=0, k^2 \approx M^2) = k^2 - M^2 + \mathcal{O}((k^2 - M^2)^2), \quad \Gamma^4(T=0, k_i=0) = \lambda_0. \quad (298)$$

Fizikailag ez azt jelenti, hogy a részecske tömege M legyen egységnyi reziduum mellett, az alacsony energiás szórás szórási hatáskeresztmetszete pedig

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda_0^2}{64\pi^2 s}, \quad \text{ahol } s = (k_1 + k_2)^2. \quad (299)$$

Valójában a hullámfüggvény renormálás fizikai értékétől függetlenek a megfigyelhető mennyiségek. Csupán azt írja le, hogyan reprezentáljuk az elméletet terekkel. Emiatt értékére bármely (véges) számot választhatunk.

- Ezen eljárással minden korrelációs függvény véges értékű lesz (l. később)

A renormálás matematikailag analitikus elfolytatásnak felel meg. Ha a teljes Lagrange-függvényt tekintjük, abban a $Z(\Lambda)$, $m_b^2(\Lambda)$ illetve $\lambda_b(\Lambda)$ mennyiségek szerepelnek (most Λ a regularizáló paraméter). Ezek kifejezhetők a renormált csatolási állandó szerint, ahogyan láttuk (294) képletben. Ennek a sornak a tagjai azonban nagyok lehetnek, hiszen mind tartalmaz divergens (sőt, a magasabb rendek felé haladva egyre divergensőbb) részt is. Ezért a Lagrange függvény mint sor konvergenciasugara nagyon kicsi lehet. Ugyanakkor a fizikai mennyiségek sora véges tagokat tartalmaz, vagyis a konvergenciasugár sokkal nagyobb lehet. Ez jól ismert a sorok esetében is. Ha pl. van egy sorunk, amelynek perturbatív kifejtése

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n x^n, \quad (300)$$

akkor ennek konvergenciasugara $|x| < 1/Q$. Egy új változóval azonban, amely kis x -ekre megegyezik x -szel: $y = x/(1 - Qx)$ a függvény $f(y) = 1 + Qy$ minden értékre konvergens.

Még pontosabban utánanézzve egy általános sémában (pl. MS) számolva a fizikai mennyiségek sora *aszimptotikus*, ami azt jelenti, hogy konvergenciasugara nulla. Gráfokat tekintve ennek az az oka, hogy n -ed rendben megjelennek $n!$ -sal növekvő tagok (renormalon). Ez azonban nem jelenti azt, hogy minden sémában ugyanolyan rossz a konvergencia. Erre később, a renormálási sémák viszonyának vizsgálatakor fogunk visszatérni.

6.1 Overall divergenciák

A renormálás stratégiája akkor működik, ha csak olyan mennyiségek divergensnek, amelyek a Lagrange-függvényben szerepelnek, lokálisak, és nem függenek a környezeti paramétereiktől, pl. a hőmérséklettől. Ez utóbbi esetben ugyanis nem lenne a környezettől független mikroszkopikus dinamika. Hogy ezeket a kérdéseket megvizsgáljuk, nézzük meg közelebbről a diagramok UV divergenciáit.

Egy diagram lehet UV divergens úgy, hogy minden propagátor impulzusa végtelenhez tart, vagy úgy, hogy csak egy aldiagram impulzusai tartanak végtelenbe. Az elsőt hívjuk overall divergenciának, a másodikat aldivergencia esete. Először foglalkozzunk csak az overall divergenciával (ami egy adott diagram esetén nyilvánvalóan a legerősebb divergencia).

Vizsgáljuk meg, hogy milyen diagramok lehetnek overall divergensnek egy általános elméletben. Dimenzióanalízist végzünk, a tömeg-dimenziókat számoljuk (a $\hbar = c = 1$ egységrendszerben az impulzus tömeg dimenziójú, a távolság inverz tömeg dimenziójú, a deriválás megint tömeg dimenziójú). A hatásfunkcionál dimenziótlan, $[S] = 0$. Emiatt d dimenzióban

$$\begin{aligned} S = \int d^d x \mathcal{L} &\Rightarrow [\mathcal{L}] = d \rightarrow 4; \\ \mathcal{L} \rightarrow \Phi(\partial^2 + m^2)\Phi &\Rightarrow [\Phi(x)] = \frac{d}{2} - 1 \rightarrow 1; \\ \Phi(k) = \int d^d x e^{ikx} \Phi(x) &\Rightarrow [\Phi(k)] = -\frac{d}{2} - 1 \rightarrow -3; \\ \mathcal{L} \rightarrow g_c \Phi^c &\Rightarrow [g_c] = c + d - \frac{cd}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow [g_c] = 0 : \quad c = \frac{2d}{d-2} \\ \mathcal{L} \rightarrow m \Psi^\dagger \Psi &\Rightarrow [\Psi(c)] = \frac{d-1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \\ \Psi(k) = \int d^d x e^{ikx} \Psi(x) &\Rightarrow [\Psi(k)] = -\frac{d+1}{2} \rightarrow -\frac{5}{2}; \\ \mathcal{L} \rightarrow g_{bc} (\Psi^\dagger \Psi)^b \Phi^c &\Rightarrow [g_c] = b + c + d - \frac{(c+2b)d}{2} \xrightarrow{b=c=1} 0 \end{aligned} \quad (301)$$

Vizsgáljunk most bozonikus elméleteket. Az effektív hatás dimenziótlan, impulzustérben a Φ^n tag együttthatójának dimenziója tehát

$$\begin{aligned} \Gamma \rightarrow \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(\sum k_i) \Gamma_n(k_1, \dots, k_n) \Phi(k_1) \dots \Phi(k_n) &\Rightarrow dn - d - \frac{d+2}{2}n + [\Gamma_n] = 0, \\ [\Gamma_n] &= d - \frac{d-2}{2}n. \end{aligned} \quad (302)$$

Ezt a dimenziót valami dimenziós paraméternek kell hordoznia. Ez lehet a levágás, és általános esetben meg is jelenik ez a faktor. Ha a csatolási állandó dimenziója $[\lambda]$, akkor ℓ -ed rendben a levágás-függés

$$\Gamma_n \sim g_c^\ell \Lambda^z \quad \Rightarrow \quad z = d - \frac{d-2}{2}n - \ell[g_c]. \quad (303)$$

Ennek jelentése:

- ha a csatolási állandó pozitív tömeg dimenziójú, akkor ℓ növekedésével egyre konvergensebb eredményt kapunk, és csak legfeljebb az $n < 2d/(d-2)$ -pont függvények lehetnek divergens. Vagyis ekkor csak véges sok diagram divergens. Ezek a *szuperrenormálható* elméletek. Például $d = 2$ két dimenziós esetben minden kölcsönhatás szuperrenormálható, mert $[g_c] = 2$. Itt $\ell = 1$ divergens csak, ez a tadpole korrekció.
- ha a csatolási állandó dimenziótlan, akkor z független a hurok rendtől. Négy dimenzióban csak a nulla-, két- és négy pontfüggvények lehetnek divergens (ez utóbbiak legfeljebb logaritmikusan), azonban bármely hurok rendben azok lesznek. Itt végtelen sok divergens diagram létezik, de csak véges sok típusú várható értékben. Ezek (lehetnek) a renormálható elméletek.
- ha a csatolási állandó dimenziója negatív, akkor magasabb rendben egyre több pont függvény lesz divergens. Végtelen hurok limeszben bárhány pont függvény divergens lesz, ezek végesítéséhez tehát végtelen sok tag kell a Lagrange-függvényben, vagyis az elmélet nem renormálható. Négy dimenzióban maximum a Φ^4 -es kölcsönhatás renormálható, $d = 6$ -ban a Φ^3 elmélet. Effektív elméletként azonban mindezek használhatók, ha csak véges hurok rendben akarunk számolni.

Az overall divergenciák esetében, definíció szerint minden propagátor impulzusa végtelenbe tart. A hőmérséklet és a kémiai potenciál azonban exponenciálisan elnyomottak nagy energián, vagyis egy ilyen faktort tartalmazó diagram véges lesz. Emiatt az overall divergenciák *nem függenek a hőmérséklettől és kémiai potenciáltól*. Ez általános elvként is megfogalmazható: az UV fizika érzéketlen az IR részletekre.

Még nem beszéltünk az overall divergenciák impulzsfüggéséről. Belátható, hogy a külső impulzusok szerinti deriválás csökkenti a divergencia fokát. Érvként nézzük meg a propagátor impulzus függését, ha p a belső impulzus, amely végtelenhez tart, k a külső impulzus. Ekkor alakíthatjuk úgy a belső impulzusokat, hogy valamelyik propagátorra

$$G(p+k) = G(p) + k_\mu \partial_\mu G(p) + \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k^2 + 2kp}{(p^2 - m^2)^2} + \dots \quad (304)$$

A második tag nagy impulzusra jobban levág, így az eredmény konvergensebb lesz. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a külső impulzus egy új, dimenziós vertexet vezet be. Emiatt a külső impulzus szerinti deriválás során előbb-utóbb konvergens eredményt kapunk. Tehát az overall divergencia a külső impulzusban polinomiális.

Emiatt az overall divergenciát el lehet tüntetni olyan módon, hogy a Lagrange függvényhez egy megfelelő (polinomiális) lokális tagot adunk hozzá, amely vezető rendben éppen kiejti a divergenciát. Ez a tag ellentagként fog megjelenni a renormált Lagrange-függvény formában. Ilyen módon konstruktív eljárásun van az ellentagok meghatározására.

6.2 Aldivergenciák

Ha egy gráfnak nincsenek overall divergenciái, attól még lehet divergens. Példa a két hurok tadpole, ahol az overall divergencián kívül még egy egy hurok korrekció is magmarad.

Aldivergencia esetében a hurok impulzusok egy része véges értéket vesz fel, míg mások végtelenhez tartanak. Emiatt kijelölhetünk egy olyan részgráfot, amelynek minden vonala végtelenbe tart. Ezt a részgráfot elkülönítve egy n -pont függvény szerepel a nagyobb gráf belsejében, amely divergens. Ehhez azonban tartozik egy olyan ellentag-rész, amely ugyanígy n -pont függvényhez ad járulékot vezető rendben, és amely végesíti a divergens n -pont függvények összegét. Emiatt ha az összes gráfot összeszedjük az adott rendben, akkor a divergens algráfokhoz mindig tartozik egy ellentag-járulék, végül végesítve az aldivergenciákat. Ennek következményeképpen az aldivergenciák a korábbi ellentag-grafokkal együtt *automatikusan* véges eredményt adnak.

Emiatt végülis egy adott rendben felírt diagram a korábbi ellentagokkal együtt már csak overall divergenciákat tartalmaz, így visszajutottunk a korábban tárgyalt esethez.

6.3 Perturbációs sémák viszonya

Szilárdtestfizikai számításoknál elterjedt folklór, hogy van egy kitüntetett regularizáció (a kristályrács), ezzel számolva van egy kitüntetett perturbációs számítás is, ahol a csatolásokat a mikroszkopikus megfigyelhető mennyiségekből származtatjuk. Implicite azonban itt is megtalálható a fenti renormálási gondolatmenet: egyrészt a rács is tartalmaz rácshibákat, különböző beállású domainekeket, vagyis a regularizáció itt sem eleve adott, szükség van arra, hogy a mikroszkopikus részletektől független legyen a makroszkopikus fizika. Másrészt különböző mérési utasítással rögzítve a paramétereket valójában itt is különböző renormálási előírásokat használunk. Ha azonban nem rögzített sem a regularizáció, sem a séma (előírás), akkor érdemes megvizsgálni ezek viszonyát.

Valójában a fizikát a teljes Lagrange függvény tartalmazza, vagyis, átskálázott tereket használva (292). Ebben a formában szereplő paraméterek, Z , m_b^2 és λ_b minden regularizálás mellett egyértelmű függvényei három kiválasztott fizikai paraméternek. Legyenek most ezek a paraméterek M , λ_0 és ζ_0 , a részecske tömege, dimenziótlanított szórási hatáskeresztmetszete valamely négyesimpulzus mellett, valamint a spektrál függvény normája (ami lehet 1). A levágás legyen Λ (lehetne helyette rácsállandót is gondolni $\Lambda \sim 1/a$). Vagyis

$$Z(M, \lambda_0, \zeta_0; \Lambda), \quad m_b^2(M, \lambda_0, \zeta_0; \Lambda), \quad \lambda_b(M, \lambda_0, \zeta_0; \Lambda). \quad (305)$$

Mivel a világ kontinuum elmélet (?), ezért ha tökéletes Lagrange-függvényt használunk, akkor a levágás értékének végtelenbe vitelekor *minden* megfigyelhető mennyiséget korrektil írunk le, vagyis (legalábbis ebben a limeszben) a renormálási sémától független a bare Lagrange-függvény. Ami azt jelenti, hogy M , λ_0 és ζ_0 helyett választhatnánk más mennyiségeket is a paraméterek rögzítésére. A megfigyelhető mennyiségek értéke ebben a limeszben független a levágástól (hiszen el lehet távolítani azt). A regularizálás maradványa azonban egy extra fizikai skála kialakulása (pl. tiszta QCD-ben a Sommer-skála).

Perurbációs számításban a (305) függvényt sor alakjában írjuk fel. A kifejtési paraméter λ_{ren} lehet közvetlenül valamelyik fizikai megfigyelhető mennyiség (pl. dimenziótlan szórási hatáskeresztmetszet), de lehet valamilyen ezekről függő absztrakt kifejtési függvény – ezek adják a különböző sémákat. Legyen egy adott sémában a csupasz csatolás kifejtése

$$\lambda_b = \lambda + \lambda^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d_1 \right) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (306)$$

Ez végesíteni fogja a megfigyelhető mennyiségeket. Az $\mathcal{O}(\lambda^2)$ tag a következő rend eredményét jelenti. Egy másik sémában számolva azonban más eredményt kapunk:

$$\lambda_b = \lambda' + \lambda'^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d'_1 \right) + \mathcal{O}(\lambda'^2). \quad (307)$$

Miután a fizika a csupasz csatolási állandóban van, nem a renormált perturbációs számításban, ezért akkor kapjuk ugyanazokat az értékeket a megfigyelhető mennyiségekre, ha λ_b ugyanaz a számolt rendig:

$$\lambda' = \lambda + \lambda^2 (d_1 - d'_1) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (308)$$

Figyeljül meg azonban, hogy az egyezés csak $\mathcal{O}(\lambda^2)$ -is igaz. Még látszólag új divergenciák is megjelennek, hiszen beírva a fenti kifejezést λ_b második alakjába:

$$\lambda_b = \lambda + \lambda^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d_1 \right) + 2\lambda^3 (d_1 - d'_1) \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d'_1 \right) + \lambda^4 (d_1 - d'_1)^2 \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + d'_1 \right). \quad (309)$$

Ezek a magasabb rendű divergenciák a magasabb rendű számításokkal természetesen eltűnnek. Mindenesetre ez azt is jelenti, hogy a magasabb rendű divergenciákban az $1/\varepsilon$ -nal arányos rész sémafüggő, és csak az adott perturbatív rendig kapunk sémafüggetlen eredményt.

Általánosan a fenti gondolatmenet azt jelenti, hogy két séma egymással összekapcsolható olyan módon, hogy az egyik renormált paramétereit a másik renormált paramétereinek segítségével kifejezzük:

$$\lambda'(m^2, \lambda, \zeta), \quad m'^2(m^2, \lambda, \zeta), \quad \zeta'(m^2, \lambda, \zeta). \quad (310)$$

Végtelen rendben számolva ekkor a csupasz paraméterek ugyanazok lesznek, vagyis minden megfigyelhető mennyiség változatlan marad. A korrelációs függvények a különböző tér-normálások miatt arányosak lesznek

$$\zeta^n G_n(k; \lambda, m^2) = \zeta'^n G'_n(k; \lambda', m'^2). \quad (311)$$

Véges rendig számolva azonban nem várhatunk pontos egyezést. Akár a csupasz paraméterek (ahogyan fent is láttuk), akár valamely fizikai mennyiség értékében különbségek lesznek. Ez utóbbihoz vegyük valamely tetszőleges fizikai megfigyelhető mennyiség kiszámításában az N -ed rendet. Az első sémában

$$\mathcal{M} = \sum_{n=0}^N \lambda^n \mathcal{M}_n. \quad (312)$$

Ide beírva a λ' kifejezését, egy olyan sort kapunk, amely még λ'^{N^2} hatványt is tartalmazni fog. Másrészt közvetlenül a vesszős sémából számolva csak az első N hatványt kapjuk meg. Általában igaz, hogy a különböző sémákból számolt mennyiségek csak az adott rendig fognak megegyezni.

A sémaváltás tehát megfelel egy változócsereinek, azaz a perturbatív sor átrendezésének (resummation). Ezzel a trükkkel elérhetjük, hogy mindig azt a perturbációs számítást használjuk, amelyik a legalkalmasabb az adott mennyiség kiszámítására, és a fizika fixen tartása segítségével a különböző sémákat egymással kapcsolatba hozhatjuk. Ez a legáltalánosabban vett renormálási csoport gondolat, s ilyen módon az összes lehetséges újraösszegezést meg tudjuk valósítani anélkül, hogy az UV divergenciák kezelését elrontanánk.

6.4 Skálaváltás nulla hőmérsékleten

A felösszegezések egyik legismertebb változata, ha a μ skálát olyannak választjuk meg, hogy mindig eltűnjenek a logaritmikus korrekciók. Ez, másként értelmezve azt is jelenti, hogy felösszegezzük a logaritmikus korrekciókat. Mivel a $\log \mu$ jellegű tagok az UV divergenciákból jönnek, és ezek hőmérséklet-függetlenek, a logaritmusok felösszegezése nulla hőmérsékleten is megvalósítható.

Tekintsünk tehát két sémát, melyekben a skálát μ -nek illetve μ' -nek választjuk, de csak ennyiben különbözzenek a véges ellentagok. Mindkét sémában elvégezzük a renormált mennyiségek kiszámítását, és a renormált paramétereket meghatározzuk a renormálási séma alapján. Ha végtelen rendig számolunk, akkor valójában minden megfigyelhető mennyiség ugyanazt az értéket fogja adni a két sémában.

Mivel azonban mások a véges ellentagok, a két sémából más lesz a renormált mennyiségek értéke, azaz a renormált mennyiségek függenek a skálától: $g_{ren}(\mu)$. Hogy ezt a függést meghatározzuk, többféle utat is követhetnénk, a lényeg, hogy azt kell megkövetelnünk, hogy a két elmélet ugyanazt a fizikát írja le.

Például kihasználhatom azt, hogy minden megfigyelhető mennyiség ugyanazt az eredményt adja, vagyis a korrelációs függvények arányosak. (311) egyenletből írhatjuk (elhagyva a ren indexet)

$$\zeta^n(\mu') G^{(n)}(k_1, \dots, k_n; m^2(\mu'), g(\mu'), \mu') = \zeta^n(\mu) G^{(n)}(k_1, \dots, k_n; m^2(\mu), g(\mu), \mu). \quad (313)$$

Ezt az egyenletet deriválhatjuk $\ln \mu$ szerint. Mivel a bal oldal nem függ μ -tól

$$\left(n \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d \ln \mu} + \frac{dm^2}{d \ln \mu} \frac{\partial}{\partial m^2} + \frac{dg}{d \ln \mu} \frac{\partial}{\partial g} + \frac{\partial}{\partial \ln \mu} \right) G^{(n)} = 0. \quad (314)$$

Három kiszámolt Green-függvényből meghatározhatjuk a fenti deriváltakat. Szokásos jelölés

$$\beta = \frac{dg}{d \ln \mu}, \quad \gamma_m = \frac{d \ln m^2}{d \ln \mu}. \quad (315)$$

A Φ^4 modellre egy hurok szinten azt kapjuk, hogy $\zeta = 1$ (mert nincs hullámfüggvény-korrekció ebben a rendben). $T = 0$ -n az $\overline{\text{MS}}$ sémában:

$$\Sigma = m^2 - \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{m}, \quad \Gamma^{(4)}(k_i = 0) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{m}. \quad (316)$$

Figyelembe véve, hogy $dm^2/d \ln \mu \sim \mathcal{O}(\lambda)$ és $d\lambda/d \ln \mu \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$, a sajátenergiából adódó egyenlet $\mathcal{O}(\lambda)$ rendig:

$$\frac{dm^2}{d \ln \mu} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial m^2} + \frac{d\lambda}{d \ln \mu} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \ln \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dm^2}{d \ln \mu} = m^2 \gamma_m = \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \quad (317)$$

Hasonlóképpen $\mathcal{O}(\lambda^3)$ rendig

$$\frac{dm^2}{d \ln \mu} \frac{\partial \Gamma^{(4)}}{\partial m^2} + \frac{d\lambda}{d \ln \mu} \frac{\partial \Gamma^{(4)}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Gamma^{(4)}}{\partial \ln \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\lambda}{d \ln \mu} = \beta = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}. \quad (318)$$

Az egyenleteket meg is lehet oldani

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}}, \quad m^2(\mu) = \frac{m_0^2(\mu)}{\left(1 - \frac{3\lambda_0}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/3}} \quad (319)$$

A fenti egyenletet át lehet írni:

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{\Lambda_0}{\mu}}, \quad \text{ahol} \quad \beta_0 = \frac{3}{16\pi^2}, \quad \Lambda_0 = \mu_0 e^{1/(\beta_0 \lambda_0)}. \quad (320)$$

Megjegyzések:

- Ez a formula azt mutatja, hogy valójában a “csatolási állandó” függ a skálától, így nem tekinthető állandónak. Ami valóban állandó, az a Λ_0 mennyiség (ez skálaváltásra invariáns, vagyis renormálási csoport invariáns). Ez azonban már dimenziós mennyiség. Vagyis egy dimenziós csatolási állandó helyett egy dimenziós mennyiségünk keletkezett: az a *dimenziós transzmutáció*.
- A fenti kifejezésnek csak $\mu < \Lambda_0$ -ra van értelme, hiszen csak akkor pozitív. $\mu = \Lambda_0$ -nál a kifejezés felrobban. Ez a Landau-pólus.
- Ha azt szeretnénk, hogy a kifejezéseink értelmesek legyenek $\mu \rightarrow \infty$ esetben is, akkor a fenti kifejezésben $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ kell, vagyis ekkor minden véges skálán $\lambda(\mu) = 0$. Ez a trivialitás.
- Ha a formuláinkat $\mu = \Lambda_0/n$ -ig hisszük el, akkor a maximális csatolási állandó $\lambda_{max} = 16\pi^2/(3 \ln n)$.
- A skálát úgy érdemes választani, hogy a logaritmikus divergenciák eltűnjenek. Vagyis ha $m^2 = 0$, akkor $\mu = |K|$ jó választás; ha emellett $k_0 = 0$, akkor $\mu = k$, ami a karakterisztikus távolság inverze. Emiatt valójában távolságfüggő módon kell változtatnunk a csatolási állandót a legjobb konvergencia érdekében:

$$\lambda(r) = \frac{1}{\beta_0 \ln(r\Lambda_0)}. \quad (321)$$

Így értelmezzük a *futó csatolási állandót*.

Mindez azonban csak interpretáció. Valójában a fizikai mennyiségeket kell kiszámítani, azok adják meg a valódi választ. A szórási hatáskeresztetszetre például a logaritmikus korrekciók figyelembe vételével az adódik, hogy

$$\sigma = \frac{\lambda^2(Q)}{64\pi^2 s}, \quad (322)$$

ahol Q az átadott impulzus. Ilyen értelemben a futó csatolási állandó fizikai értelmet nyer.

6.5 Hőmérsékletfüggő tömeg és csatolás

Magas hőmérsékleten a tömeg négyzethez kapunk egy relatív $\sim \lambda T^2/m^2$ véges hőmérsékletű korrekciót, a csatolási állandóhoz egy relatív $\sim \lambda T/m$ korrekciót. Ezek magas hőmérsékleten meghaladják 1-et, ami azt jelenti, hogy a perturbatív sor konvergenciája elromlik.

De egy javított perturbációs számítással itt is eredményt érhetünk el. A sajátenergia kifejezésével felírva az effektív hatás kvadratikus részét nulla impulzusnál (cf. (246))

$$\Gamma^{(2)}(0) = m^2 + \frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{\lambda}{2} \mathcal{T}(T, m) + \delta m_1^2, \quad (323)$$

itt választhatjuk

$$\delta m_1^2 = -\frac{\lambda_{ren} m_{ren}^2}{32\pi^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m_{ren}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\lambda}{2} \mathcal{T}(T, m). \quad (324)$$

Hasonlóképpen a renormált $\Gamma^{(4)}$ nulla impulzusnál (cf. (297))

$$\Gamma^{(4)}(0) = \lambda + \delta\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi \right] + \frac{3\lambda^2}{2} \mathcal{I}_{fin}(0), \quad (325)$$

ahol választható

$$\delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi \right] - \frac{3\lambda^2}{2} \mathcal{I}_{fin}(0). \quad (326)$$

Ez a séma kiválóan alkalmas a T hőmérsékleten való számítások elvégzésére. Meg kell azonban határozni a renormált paramétereket, ezt pedig nulla hőmérsékletű számításokkal szokás rögzíteni.

Tegyük fel, hogy nulla hőmérsékleten az $\overline{\text{MS}}$ sémában megbízhatóan ki tudjuk számítani a megfigyelhető mennyiségeket, és ismerjük a Lagrange-függvénybeli paraméterek értékét. A legcélszerűbb tehát a fenti OM sémának ehhez az $\overline{\text{MS}}$ sémához való viszonyát meghatározni. Ebben a sémában

$$\begin{aligned} \delta m_{\overline{\text{MS}}}^2 &= -\frac{\lambda_{\overline{\text{MS}}} m_{\overline{\text{MS}}}^2}{32\pi^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m_{\overline{\text{MS}}}^2}{4\pi\mu^2} \right), \\ \delta\lambda_{\overline{\text{MS}}} &= -\frac{3\lambda_{\overline{\text{MS}}}^2}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi \right]. \end{aligned} \quad (327)$$

A két séma paramétereinek meghatározásához most használjuk azt a feltételt, hogy a csupasz Lagrange függvény ugyanaz legyen (hiszen ez írja le a fizikát, nem a renormált Lagrange-függvény). Azaz

$$m^2 + \delta m^2 = m_{\overline{\text{MS}}}^2 + \delta m_{\overline{\text{MS}}}^2, \quad \lambda + \delta\lambda^2 = \lambda_{\overline{\text{MS}}} + \delta\lambda_{\overline{\text{MS}}}. \quad (328)$$

Ahogy a korábbi analízisekből láthattuk, ezek az egyenletek csak a megfelelő csatolási állandó rendig elégíthetők ki, a magasabb rendek konzisztenciájáért a magasabb hurkok felelősek. Az első egyenletben ezért az $\mathcal{O}(\lambda^2)$ rendet már elhagyjuk. Mivel $m^2 = m_{\overline{\text{MS}}}^2 + \mathcal{O}(\lambda)$, ezért $\lambda m^2 = \lambda_{\overline{\text{MS}}} m_{\overline{\text{MS}}}^2 + \mathcal{O}(\lambda^2)$, vagyis ebben a rendben megegyeznek. Emiatt

$$m^2 - \frac{\lambda}{2} \mathcal{I}(T, m) = m_{\overline{\text{MS}}}^2. \quad (329)$$

A csatolási állandó egyenletében ugyenztt mondhatjuk. Ezen felül az utolsó tag együtthatóját írhatjuk $\lambda^2 = \lambda\lambda_{\overline{\text{MS}}} + \mathcal{O}(\lambda^3)$ alakban. Ekkor

$$\lambda - \frac{3}{2} \lambda\lambda_{\overline{\text{MS}}} \mathcal{I}(T, m) = \lambda_{\overline{\text{MS}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\overline{\text{MS}}}} = -\frac{3}{2} \mathcal{I}(T, m). \quad (330)$$

Ha a hőmérséklet jóval nagyobb, mint a tömeg, akkor használhatjuk a magas hőmérsékletű kifejtést:

$$\begin{aligned} m^2 &= m_{\overline{\text{MS}}}^2 + \frac{\lambda T^2}{24} - \frac{\lambda T m}{8\pi} + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \ln \frac{ec^2 T^2}{\mu^2} \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\overline{\text{MS}}}} &= \frac{3T}{16\pi m} - \frac{3}{32\pi^2} \ln \left(\frac{cT}{\mu} \right)^2, \end{aligned} \quad (331)$$

ahol $c = 4\pi e^{-\gamma_E} \approx 7.06$. A fenti egyenletből látható, hogy érdemes a skálát $\mu_T = cT \approx 7T$ -re választani, ekkor a logaritmikus tagok elhagyhatók. Az $\overline{\text{MS}}$ sémában már láttuk, hogyan kell skálát váltani, ezért írhatjuk

$$\begin{aligned} m^2 &= m_{\overline{\text{MS}}}^2(\mu_T) + \frac{\lambda T^2}{24} - \frac{\lambda T m}{8\pi} \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\overline{\text{MS}}}(\mu_T)} &= \frac{3T}{16\pi m}. \end{aligned} \quad (332)$$

Ha a T/m korrekciókat elhagyjuk, akkor

$$\lambda = \lambda_{\overline{\text{MS}}}(\mu_T), \quad m^2 = m_{\overline{\text{MS}}}^2(\mu_T) + \frac{\lambda_{\overline{\text{MS}}}(\mu_T) T^2}{24} \quad (333)$$

kifejezéshez jutunk. Ez a “daisy” (százszorszép) felösszegzés, ami diagrammatikusan az iterált tadpole felösszegzést jelenti. A futás itt a 4 dimenziós, azaz nulla hőmérsékletű futásnak felel meg.

Magas hőmérsékleten, pontosabban ha $T \gg m$, akkor más aszimptotikát kapunk. A csatolási állandó kifejezésében a jobb oldal nagy lesz, vagyis

$$\lambda \approx \frac{16\pi m}{3T}. \quad (334)$$

A tömeg egyenletébe visszaírva, és figyelembe véve, hogy még magasabb hurok rendekben a csatolási állandónak lehet egy fix pontja (λ_*), kapjuk

$$m = \frac{8\pi}{\lambda_* T} \left(m_{\overline{\text{MS}}}^2(\mu_T) + \frac{\lambda_* T^2}{24} \right). \quad (335)$$

Spontán sértett elméletekben $m_{\overline{\text{MS}}}^2 < 0 \equiv -\frac{\lambda_* T^2}{24}$. Ezzel azt kapjuk, hogy

$$m \sim (T - T_c). \quad (336)$$

A valódi fizikai tömeg a korrelációs hossz inverze, azaz $\xi \sim 1/m \sim (T - T_c)^{-1} = (T - T_c)^{-\nu}$. A csatolási állandóra pedig $\lambda - \lambda_* \sim T - T_c \sim (T - T_c)^\kappa$. A ν és κ kritikus exponensek értéke a jelen számolásból $\nu = \kappa = 1$, ami az $N = \infty$ $O(N)$ modell kritikus exponenseinek felel meg. A daisy közelítésben $\nu = 1/2$, ami az átlagtérelmélet eredménye.

6.6 2PI felösszegzés

Eddig impulzusfüggetlenül végeztük a felösszegzést, amivel nem változtattuk meg a renormált Lagrange függvény funkcionális alakját a csupas Lagrange függvényhez képest. Ez azonban nem szükségszerű, elképzelhető olyan renormálási séma is, amelyben a funkcionális alak is megváltozik. Ekkor elképzelhető, hogy az ellentagba beolvasztjuk a teljes sajátenergiás korrekciót, vagyis egyáltalán nem lesz sajátenergia. Ekkor a fa gráf szintű propagátor az egzakt propagátor lesz.

Ez a gondolat áll a háttérben a 2-részecske irreducibilis (2PI) felösszegzésnek. Formálisan ezt J. M. Cornwall, R. Jackiw és E. Tombolis, Phys. Rev. D10, 2428 (1974) vezette be először a részecskefizikában. Új eredményeket l. J. Berges and J. Cox, Phys. Lett. B 517 (2001) 369; A. Arrizabalaga, J. Smit and A. Tranberg, Phys. Rev. D 72 (2005) 025014; G. Aarts and J. Berges, Phys. Rev. D 64 (2001) 105010; J. Berges, Nucl. Phys. A 699 (2002) 847; G. Aarts and J. Berges, Phys. Rev. Lett. 88, 041603 (2002); A. Arrizabalaga, J. Smit and A. Tranberg, JHEP 0410 (2004) 017 cikkekben.

A 2PI formalizmusban a generátor funkcionált nemcsak az áramok, hanem az általánosított kernel szerint is vesszük:

$$Z[j, K] = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi) + ij\varphi + \frac{1}{2}\varphi K\varphi}. \quad (337)$$

Az összefüggő diagramok generátora W a szokásos módon képezhető

$$Z[j, K] = e^{iW[j, K]}. \quad (338)$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_x \rangle |_{j, K} &= \frac{\partial W}{\partial j_x} = \Phi_x, \\ \frac{1}{2} \langle \text{T}\varphi_x \varphi_y \rangle |_{j, K} &= \frac{1}{2} (\langle \varphi_x \rangle \langle \varphi_y \rangle + \langle \text{T}\varphi_x \varphi_y \rangle_c) = \frac{\partial W}{\partial K_{xy}} = \frac{1}{2} (\Phi_x \Phi_y + iG_{xy}). \end{aligned} \quad (339)$$

Ezután Legendre transzformációt hajtunk végre, de nemcsak j , hanem K szerint is:

$$\Gamma[\Phi, G] = W - j_x \frac{\partial W}{\partial j_x} - K_{xy} \frac{\partial W}{\partial K_{xy}} = W - j_x \Phi_x - \frac{1}{2} K_{xy} (\Phi_x \Phi_y + iG_{xy}). \quad (340)$$

Innen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi} &= \frac{\partial W}{\partial \Phi} - \frac{\partial j}{\partial \Phi} \Phi - j - \frac{\partial K}{\partial \Phi} \frac{\partial W}{\partial K} - K\Phi, \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial iG} &= \frac{\partial W}{\partial iG} - \frac{\partial j}{\partial iG} \Phi - \frac{\partial K}{\partial iG} \frac{\partial W}{\partial K} - \frac{1}{2} K. \end{aligned} \quad (341)$$

Mivel

$$dW = \frac{\partial W}{\partial j} \left(\frac{\partial j}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial j}{\partial iG} diG \right) + \frac{\partial W}{\partial K} \left(\frac{\partial K}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial K}{\partial iG} diG \right), \quad (342)$$

a következő alak marad

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi} = -j - K\Phi, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial iG} = -\frac{1}{2}K. \quad (343)$$

A fizikai pontban $j = K = 0$, azaz $\Gamma_\Phi = 0$ és $\Gamma_G = 0$.

Hasonlóan, ahogyan a 1PI diagramok generátoránál láttuk, most is adjunk PI reprezentációt a $\Gamma[\Phi, G]$ generátorra

$$e^{i\Gamma[\Phi, G]} = e^{iW[j] - ij\Phi - \frac{i}{2}K(\Phi\Phi + iG)} = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] + ij(\varphi - \Phi) + \frac{i}{2}\varphi K\varphi - \frac{i}{2}K(\Phi\Phi + iG)}. \quad (344)$$

Az 1-pont függvény alakja

$$e^{i\Gamma} \langle \varphi_x \rangle_{\Phi, G} = e^{-ij\Phi - \frac{i}{2}K(\Phi\Phi + iG)} \int \mathcal{D}\varphi \varphi_x e^{iS + ij\varphi + \frac{i}{2}\varphi K\varphi} = e^{-ij\Phi - \frac{i}{2}K(\Phi\Phi + iG)} \frac{\partial}{\partial i j_x} e^{iW} \Rightarrow \langle \varphi_x \rangle_{\Phi, G} = \Phi_x. \quad (345)$$

Ez azt jelenti, hogy egy vonallal összekötött aldiagram Φ_x -szel helyettesítendő, vagyis csak 1PI diagramok maradnak. Hasonlóan

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma} (\langle \varphi_x \varphi_y \rangle - \langle \varphi_x \rangle \langle \varphi_y \rangle) &= e^{-ij\Phi - \frac{i}{2}K(\Phi\Phi + iG)} \int \mathcal{D}\varphi \varphi_x \varphi_y e^{iS + ij\varphi + \frac{i}{2}\varphi K\varphi} - \Phi_x \Phi_y e^{i\Gamma} = \\ &= -2ie^{-ij\Phi - \frac{i}{2}K(\Phi\Phi + iG)} \frac{\partial}{\partial K_{xy}} e^{iW} - \Phi_x \Phi_y e^{i\Gamma} \Rightarrow \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_{conn, \Phi, G} = iG_{xy}, \end{aligned} \quad (346)$$

azaz 2 vonallal bekötött aldiagramot G -vel kell helyettesíteni. Emiatt a G -vel kifejezett elméletben nem lehetnek olyan aldiagramok, amelyek két vonallal vannak a maradékhoz kötve. Más szóval ha két vonalat elvágunk, akkor még mindig összefüggő diagramhoz jutunk. Ezeket a diagramokat nevezzük 2PI diagramoknak. A két vonallal a maradék részhez kötött diagramok más szóval a (Φ háttértől függő) sajátenergiás korrekciók. Emiatt a 2PI diagramok azok, ahol nincsenek sajátenergiás diagramok – hiszen pontosan ezeket összegeztük fel akkor, amikor az egzakt propagátort használjuk.

Az 1PI generátort úgy kapjuk meg a 2PI generátorból, hogy inverz Legendre transzformációt csinálunk a K kernel szerint

$$\Gamma[\Phi, G] = \Gamma[\Phi, K] - \frac{1}{2}K_{xy}(\Phi_x \Phi_y + iG_{xy}), \quad \frac{\partial \Gamma[\Phi, G]}{\partial G} = -\frac{i}{2}K. \quad (347)$$

Az 1PI generátort $K = 0$ -nál kapjuk:

$$\Gamma[\Phi] = \Gamma[\Phi, G] \Big|_{\frac{\partial \Gamma}{\partial G} = 0}. \quad (348)$$

Perturbációs számításban kiemelhetjük expliciten az első néhány tagot. Bozonikus esetben:

$$\Gamma[\Phi, G] = S[\Phi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln G + \frac{1}{2} \text{Tr} G_0^{-1} G + \Gamma_{int}[\Phi, G], \quad (349)$$

itt G_0 a szabad propagátor, valamint $\Gamma_{int}[\Phi, G]$ a $\Gamma[\Phi, G]$ azon része, amely legalább egy vertexet tartalmaz. A fenti kifejezésben a $\partial \Gamma / \partial G = 0$ egyenlet megoldását kell behelyettesíteni G -re. A fenti egyenlet igazolásához a kölcsönhatásmentes esetet nézzük, ahol $G^{-1} = G_0^{-1}$ és $\Gamma[\Phi] = S[\Phi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln G_0$. A fenti alakból

$$\begin{aligned} \Gamma_0[\Phi, G] &= S[\Phi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln G + \frac{1}{2} \text{Tr} G_0^{-1} G \Rightarrow \frac{\partial \Gamma_0[\Phi, G]}{\partial G_{ij}} = -\frac{1}{2} G_{ji}^{-1} + \frac{1}{2} G_{0ji}^{-1} = 0 \\ \Rightarrow \Gamma_0[\Phi] &= \Gamma_0[\Phi, G] \Big|_{\frac{\partial \Gamma}{\partial G} = 0} = S[\Phi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln G_0 + \text{const.} \end{aligned} \quad (350)$$

A kölcsönhatások Γ_{int} -ben vannak. A propagátor egyenlete kölcsönható esetben:

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma[G], \quad \text{ahol} \quad \frac{\partial \Gamma_{int}[\Phi, G]}{\partial G_{ji}} = -\frac{1}{2} \Sigma[G]_{ij}. \quad (351)$$

Vagyis perturbatív módon úgy kell eljárni, hogy vesszük a sajátenergia propagátorokkal felírt kifejezését, és azt általános propagátorokkal értelmezve megoldjuk a fenti egyenletet.

A fenti egyenletekből a formális számítások világosak, azonban nem világos az, hogy ezzel az átalakítással renormálható elméletet kapunk. Az irodalomban számos technika létezik a renormálás elvégzésére, most egy, a renormálási csoportra alapuló technikát mutatok be.

Ennek lényege az a megfigyelés, hogy a 2PI diagramoknál nincsen sajátenergiás korrekció. Az inverz propagátor kifejtésénél

$$\Gamma_2(k) = k^2 - m^2 - \delta m^2 - \Sigma_{diagram}(k) \quad (352)$$

már láttuk, hogyan lehet a radiatív korrekciókat tömeghéjon eltüntetni az ellentag véges részének megfelelő választásával: $\delta m^2 = -\Sigma_{diagram}(k_0 = m, \mathbf{k} = 0)$. Ekkor $\Gamma_2(k^2 = m^2) = 0$, vagyis a fent szereplő m az egzakt tömeg.

Ezt a gondolatot tovább folytatva megpróbálhatjuk az ellentagot *impulzusfüggő* módon megválasztani, és ezzel elérni azt, hogy egyáltalán ne legyen radiatív korrekció. Vagyis formálisan $\delta m^2(k) = -\Sigma_{diagram}(k)$. Hogy ezt konzisztensen csináljuk több problémát is meg kell oldanunk

- az állandó fizika, vagyis a csupasz Lagrange függvény konstansnak tartása
- a diagramok divergens részének vizsgálata
- a szabad paraméterek rögzítése.

A fentiek megoldását korábban pontosan a renormálási séma választása jelentette. Most általánosítsuk tehát a renormálási sémát impulzusfüggő véges tagok esetére. Ehhez induljunk ki ismét a Φ^4 elmélet csupasz Lagrange függvényéből.

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2}(\partial\Phi)^2 - \frac{m_0^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_0}{24}\Phi^4. \quad (353)$$

Most a renormált-ellentag szétválasztást impulzusfüggő módon végezzük el:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi K(i\partial)\Phi - \frac{\lambda}{24}\Phi^4 + \frac{1}{2}\Phi \delta K(i\partial)\Phi - \frac{\delta\lambda}{24}\Phi^4, \quad (354)$$

ami a fenti (353) egyenlettel konzisztens, ha

$$Zk^2 - m_0^2 = K(k) + \delta K(k), \quad \lambda_0 = \lambda_R + \delta\lambda. \quad (355)$$

Láthatóan csak a kernel és az ellentag összege fixált, vagyis pl. szabadon megválaszthatom az ellentagot, ekkor a kernelt a fenti egyenletből kell számolnom. Ebben az egyenletben azonban még Z és m_0^2 sem rögzített, azt a számítás folyamán kell meghatározni.

A fenti Lagrange függvényben a szabad illetve kölcsönható tag szétválasztása

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\Phi K\Phi, \quad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda_R}{24}\Phi^4 + \frac{1}{2}\Phi \delta K\Phi - \frac{\delta\lambda}{24}\Phi^4 \quad (356)$$

módon történik, a perturbációs számításban $\int \mathcal{L}_I$ szrinti kifejtést végzünk, mint eddig is. Ebből Feynman diagramokat fogunk számolni, ahol a propagátorokat a K kernelből származtatjuk az általános esetnek megfelelően. Az ellentag végtelen részét úgy kell megválasztani, hogy a Feynman diagramok végesek legyenek – vagyis δK -ban divergenciák kell, hogy fellépjenek. Ez csak akkor konzisztens (355) egyenlettel, ha a divergenciák k -ban polinomiálisak, vagyis ugyanolyan alakúak, mint a szabad elméletben.

Hogy egy általános propagátor esetén is ugyanazok a divergenciák lépnek fel a Feynman diagramokban, az a (304) egyenletből látszik. Minden olyan propagátor, amelyre $G(p+k)$, $p \rightarrow \infty$ esetén polinomiális k -ban, teljesíti azt a feltételt, hogy a külső impulzus szerinti deriválás csökkenti a diagram divergencia fokát, ami oda vezetett, hogy a diagram divergenciái polinomiálisak k -ban.

Hasonlóképpen az ellentagokkal eltüntetendő divergenciák mind overall divergenciák, s ebben, még általános propagátor esetén is, a hőmérsékletfüggő tagok nem adnak járulékot. Általános propagátornál a KMS reláció biztosítja, hogy a hőmérsékletfüggés a Bose-Einstein illetve Fermi-Dirac eloszlás formájában jelentkezzen.

Ilyen általános kernel választással felírhatjuk az effektív hatást is. Ennek kvadratikus része

$$\Gamma_2(k) = K(k) - \Sigma_{diagram}(G, k) + \delta K(k), \quad (357)$$

ahol most expliciten jeleztük, hogy a diagramok kiszámításánál a G propagátort kell használni, amely a K kernelből következik. A sajátenergia divergenciái, ahogy láttuk, még általános kernel, illetve propagátor választása mellett is $\Sigma_{2div}k^2 + \Sigma_{0div}$ alakú. Hogy a fenti alak véges legyen,

$$\delta K(k) = \Sigma_{2div}k^2 + \Sigma_{0div} + \delta K_{fin}(k) \quad (358)$$

módon kell választani az ellentagot, ahol a véges rész tetszőleges, de ki kell elégítenie az állandó fizika (355) feltételét:

$$Zk^2 - m_0^2 = K(k) + \delta K_{fin}(k) + \Sigma_{2div}k^2 + \Sigma_{0div} \Rightarrow Z = 1 + \Sigma_{2div}, \quad m_0^2 = m^2 - \Sigma_{0div}, \quad (359)$$

ahol m^2 már véges érték. Emiatt a véges részekre érvényes egyenlet

$$k^2 - m^2 = K(k) + \delta K_{fin}(k), \quad (360)$$

és az effektív hatás kvadratikus része is véges

$$\Gamma_2(k) = K(k) - \Sigma_{diagram}^{fin}(G, k) + \delta K_{fin}(k). \quad (361)$$

Ezek után a 2PI felösszegzéshez szükséges választást konzisztensen meg tudjuk tenni:

$$\delta K_{fin}(k) = \Sigma_{diagram}^{fin}(G, k), \quad (362)$$

ekkor

$$\Gamma_2(k) = K(k), \quad K(k) = k^2 - m^2 - \Sigma_{diagram}^{fin}(G, k). \quad (363)$$

Ez utóbbi egyenlet pontosan megfelel (351) egyenletnek, csak most renormált formában. A perturbációs számításban is jól érthető, hogy minden sajátenergiás diagram mellett megjelenik δK ellentag is, amely pontosan kiöli azt, vagyis végeredményben a sajátenergiás betétet tartalmazó gráfok eltűnnek a rendszerből. Maradnak a 2PI diagramok, ahogyan azt korábban is láttuk.

Mindez azt jelenti, hogy a 2PI felösszegzés is egy speciális sámanak tekinthető. A séma teljes rögzítéséhez használhatunk itt is renormálási feltételeket, ezek fogják m^2 illetve a véges λ értékét megadni egy adott fizikai helyzetben.

6.7 2PI egyenletek nemegyensúlyi esetben

A fenti gondolatmenetet alkalmazhatjuk nemegyensúlyi helyzetben is, hiszen a levezetés során sehol nem használtuk ki azt, hogy egyensúlyban lennénk. A sajátenergiás egyenletet ekkor érdemes a (218) alakban írni, ahol most minden mennyiség véges (renormált), és a sajátenergia a propagátortól függ.

Nemegyensúlyi helyzetben azonban nincsen téridő-eltolási szimmetria, ezért minden propagátor két impulzustól függ. Az R/A formalizmusban a következő egyenleteket lehet felírni:

$$\begin{aligned} G_{ab}(x, y) &= G_{ab}^{(0)}(x - z) + G_{ac}^{(0)}(x - z)\Sigma_{cd}(z, w)G_{db}(w, y), \\ G_{ab}(x, y) &= G_{ab}^{(0)}(x - z) + G_{ac}(x, z)\Sigma_{cd}(z, w)G_{db}^{(0)}(w - y), \end{aligned} \quad (364)$$

ahol a, b, c, d indexek r vagy a lehetnek, és az ismétlődő indexek/koordináták összegzést jelentenek. A szabad propagátor inverzével:

$$K_0(i\partial_x)G_{ab}^{(0)}(x) = \varepsilon_{ab}\delta(x), \quad (365)$$

ahol a Φ^4 elméletben $K_0(k) = k^2 - m^2$ és $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{aa} = 0$, valamint $\varepsilon_{ar} = \varepsilon_{ra} = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} K_0(i\partial_x)G_{ab}(x, y) &= \varepsilon_{ab}\delta(x - y) + \varepsilon_{ac}\Sigma_{cd}(x, z)G_{db}(z, y), \\ K_0(i\partial_y)G_{ab}(x, y) &= \varepsilon_{ab}\delta(x - y) + G_{ac}(x, z)\Sigma_{cd}(z, y)\varepsilon_{db}. \end{aligned} \quad (366)$$

Először is nézzük meg stacionárius, téreltolás-invariáns állapotokra a megoldást. Ekkor az (x, y) -függésből $(x - y)$ függés lesz. Bozonoknál $G_{rr}(x) = G_{rr}(-x)$, így a bal oldalak ugyanazok lesznek. Az rr propagátorra felírva a fenti képleteket, Fourier transzformáció után kapjuk:

$$\Sigma_{aa}(k)G_{ar}(k) + \Sigma_{ar}(k)G_{rr}(k) = G_{ra}(k)\Sigma_{aa}(k) + G_{rr}(k)\Sigma_{ra}(k). \quad (367)$$

azaz

$$(\Sigma_{ar}(k) - \Sigma_{ra}(k)) G_{rr}(k) = \Sigma_{aa}(k) (G_{ra}(k) - G_{ar}(k)). \quad (368)$$

Mivel $iG_{ra} - iG_{ar} = \varrho$, azt kapjuk, hogy

$$iG_{rr}(k) = \frac{\Sigma_{aa}(k)}{\text{Disc } \Sigma_R(k)} \varrho(k), \quad (369)$$

vagyis az rr propagátor a spektrál függvénnyel arányos, az arányossági konstans jelölhetjük $1/2 + n(k_0)$ -vel.

Most nézzük (366) egyenleteket teljesen nemegyensúlyi körülmények között. Írjuk fel az rr komponens egyenletét ismét:

$$\begin{aligned} K_0(i\partial_x)G_{rr}(x, y) &= \Sigma_{ar}(x, z)G_{rr}(z, y) + \Sigma_{aa}(x, z)G_{ar}(z, y), \\ K_0(i\partial_y)G_{rr}(x, y) &= G_{rr}(x, z)\Sigma_{ra}(z, y) + G_{ra}(x, z)\Sigma_{aa}(z, y). \end{aligned} \quad (370)$$

Kivonva a két egyenletet egymásból, felhasználva, hogy $K_0(i\partial) = -((i\partial)^2 + m^2)$, kapjuk

$$(-\partial_x^2 + \partial_y^2)G_{rr}(x, y) = \text{St}(x, y), \quad (371)$$

ahol

$$\text{St}(x, y) = \int d^4z \left[\Sigma_{ar}(x, z)G_{rr}(z, y) + \Sigma_{aa}(x, z)G_{ar}(z, y) - G_{rr}(x, z)\Sigma_{ra}(z, y) - G_{ra}(x, z)\Sigma_{aa}(z, y) \right], \quad (372)$$

ahol St az ütközési (Stoß) integral.

Végezzük el a következő traszformációt (Wigner-traszformáció):

$$\bar{f}(u, X) = f\left(X + \frac{u}{2}, X - \frac{u}{2}\right), \quad f(x, y) = \bar{f}\left(x - y, \frac{x + y}{2}\right). \quad (373)$$

u szerint Fourier-traszformálva

$$\bar{f}(p, X) = \int d^4u e^{ipu} \bar{f}(u, X) = \int d^4u e^{ipu} f\left(X + \frac{u}{2}, X - \frac{u}{2}\right), \quad \bar{f}(u, X) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \bar{f}(p, X). \quad (374)$$

Emiatt

$$\begin{aligned} \partial_x \bar{f} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right) \bar{f} \Rightarrow \left(-ip + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right) \bar{f}(p, X) \\ \partial_y \bar{f} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right) \bar{f} \Rightarrow \left(ip + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right) \bar{f}(p, X). \end{aligned} \quad (375)$$

Vagyis

$$-\partial_x^2 + \partial_y^2 \rightarrow -\left(-ip + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 + \left(ip + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 = 2ip\partial_X. \quad (376)$$

Vagyis a 2PI egyenletek

$$2ip\partial_X \bar{G}_{rr}(p, X) = \bar{\text{St}}(p, X) \quad (377)$$

alakba írhatók. A jobb oldal kölcsönhatás nélküli esetben nulla, ekkor a szabad Boltzmann-egyenletet kapjuk vissza! Vagyis a 2PI egyenletek kölcsönhatás nélküli esetben megegyeznek a Boltzmann egyenletekkel.

Kölcsönható esetben a sajátenergia nem nulla, vagyis $\bar{\text{St}} \neq 0$. Az ütközési integrál szerkezete

$$(f \cdot g)(x, y) = \int d^4z f(x, z)g(z, y) \Rightarrow \overline{(f \cdot g)}(u, X) = \int d^4z f\left(X + \frac{u}{2}, z\right)g\left(z, X - \frac{u}{2}\right). \quad (378)$$

A Wigner traszformált alakokat beírva

$$\begin{aligned} \overline{(f \cdot g)}(u, X) &= \int d^4z \bar{f}\left(X + \frac{u}{2} - z, \frac{1}{2}(X + \frac{u}{2} + z)\right) \bar{g}\left(z - X + \frac{u}{2}, \frac{1}{2}(z + X - \frac{u}{2})\right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} s = X + \frac{u}{2} - z, \quad z = X + \frac{u}{2} - s \\ \frac{1}{2}(X + \frac{u}{2} + z) = X + \frac{u}{2} - \frac{s}{2} \\ z - X + \frac{u}{2} = u - s \\ \frac{1}{2}(z + X - \frac{u}{2}) = X - \frac{s}{2} \end{array} \right\} = \\ &= \int d^4s \bar{f}\left(s, X + \frac{u}{2} - \frac{s}{2}\right) \bar{g}\left(u - s, X - \frac{s}{2}\right). \end{aligned} \quad (379)$$

A szokásos közelítés szerint az s illetve u változási tartománya jóval kisebb, mint amelyen belül a $\bar{g}(u, X)$ az átlag-koordinátákban változik. Ekkor a második argumentum szerint sorba fejthetjük a fenti kifejezést (gradiens kifejtés)

$$\overline{(f \cdot g)}(u, X) \approx \int d^4 s \bar{f}(s, X) \bar{g}(u - s, X) = (f * g)(u, X), \quad (380)$$

vagyis konvolúciót kapunk. Fourier-térben tehát

$$\overline{(f \cdot g)}(p, X) \approx \bar{f}(p, X) \bar{g}(p, X). \quad (381)$$

Emiatt a gradiens kifejtés vezető rendjében, i -vel szorozva

$$2ip\partial_X i\bar{G}_{rr} = (\bar{\Sigma}_{ar} - \bar{\Sigma}_{ra})i\bar{G}_{rr} + \bar{\Sigma}_{aa}(i\bar{G}_{ar} - i\bar{G}_{ra}), \quad (382)$$

ahol minden argumentum (p, X) . Átírva az 12 Keldysh komponensekre (225) és (83) alapján, azaz

$$\begin{aligned} \Sigma_{ar} &= \Sigma_{11} + \Sigma_{12}, & \Sigma_{ra} &= \Sigma_{11} + \Sigma_{21}, & \Sigma_{aa} &= \frac{\Sigma_{21} + \Sigma_{12}}{2}, \\ G_{rr} &= \frac{G_{12} + G_{21}}{2}, & iG_{ra} - iG_{ar} &= \varrho = iG_{21} - iG_{12}. \end{aligned}$$

Ezzel

$$2ip\partial_X i\bar{G}_{rr} = (\bar{\Sigma}_{12} - \bar{\Sigma}_{21}) \frac{i\bar{G}_{12} + i\bar{G}_{21}}{2} + \frac{\bar{\Sigma}_{12} + \bar{\Sigma}_{21}}{2} (i\bar{G}_{12} - i\bar{G}_{21}),$$

vagyis

$$2ip\partial_X i\bar{G}_{rr} = \bar{\Sigma}_{12} i\bar{G}_{12} - \bar{\Sigma}_{21} i\bar{G}_{21}. \quad (383)$$

A jobb oldalon, a Boltzmann-egyenletek statisztikus értelmezésének megfelelően (és figyelembe véve a Σ definícióját), a második tagot p impulzusú állapotba való beszórás, az elsőt az onnan való kiszórás valószínűségének értelmezhetjük.

Elvileg van egy másik egyenletrendszer is, amely a G_{ra} propagátorokat határozza meg, ekkor a fenti egyenletekkel konzisztens, megoldható rendszert alkotnának. Itt azonban közelítéseket szoktak alkalmazni. Elsősorban feltesszük, hogy a spektrál függvény már beállt az egyensúlyi értékére, vagyis $\varrho(p, X) \rightarrow \varrho(p)$ helyfüggetlen. Ezen felül feltesszük azt is, hogy a G^{12} propagátor (és így G^{21} is) arányos a ϱ -val, ez definiálja a nemegyensúlyi eloszlásfüggvényt:

$$G^{12}(p, X) = n(p, X) \varrho(p). \quad (384)$$

Ezek után a sajátenergiára alkalmazhatjuk azt a gondolatmenetet, amit korábban a (261) levezetésénél használtunk. Σ^{12} kiszámításánál a bal oldali vertex 1, a jobb oldali 2, és, a 2PI séma következtében csak 2PI diagramokat kell figyelembe venni. Ekkor van egy 2PI domain, amely a bal oldali vertexhez csatolódik, és minden külső vertexe 1, és egy olyan, amely a jobb oldali vertexhez kapcsolódik, és minden külső vertexe 2. Ezeket G^{12} propagátorok kötik össze. A két járulék, ha minden diagramot összeszedünk, egymás komplex konjugáltja. A sajátenergia definíciója miatt még egy extra negatív előjel is jön. Vagyis, szimbolikusan

$$\Sigma^{12}(p, X) = -i \sum_{\ell} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_{\ell}}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum_{\ell} p_{\ell}) \varrho(p_1) \dots \varrho(p_{\ell}) n(p_1) \dots n(p_{\ell}) |\Gamma_{\ell+1}^{11\dots 1}(p, p_1, \dots, p_{\ell})|^2. \quad (385)$$

Hasonló kifejezést kapunk Σ^{21} -re is. Ezzel a Boltzmann egyenlet alakja

$$2p\varrho(p)\partial_X n(p, X) = \sum_{\ell} \int_{p_1 \dots p_{\ell}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum_{\ell} p_{\ell}) |\Gamma_{\ell+1}^{11\dots 1}|^2 \varrho_1 \dots \varrho_{\ell} \left((1 \pm n)(1 \pm n_1) \dots (1 \pm n_{\ell}) - n n_1 \dots n_{\ell} \right). \quad (386)$$

További közelítésként fel szokták tenni, hogy a spektrál függvény a szabad spektrál függvénnyel egyezik

$$\varrho(p) \rightarrow \varrho_0(p) = \frac{2\pi}{2E_p} [\delta(p_0 - E_p) - \delta(p_0 + E_p)], \quad (387)$$

valamint hogy az $1 \pm n(-p_0) = \mp n(p_0)$ igaz. Az eloszlásfüggvények ekkor már csak \mathbf{p} függvényei, és így megkapjuk a (kvantumos) Boltzmann egyenlet szokásos alakját

$$\partial_t n - \mathbf{v} \nabla n = \frac{1}{2E_p} \sum_{\ell} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdots \frac{d^3 \mathbf{p}_{\ell}}{(2\pi)^3 2E_{\ell}} (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \sum \mathbf{p}_i) \sum_{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_{\ell}} \left[|\Gamma_{\ell+1}^{11 \dots 1}|^2 \delta(E_p - \sum \alpha_i E_i) \left((1 \pm n) n_{\alpha_1, 1} \dots n_{\alpha_{\ell}, \ell} - n n_{-\alpha_1, 1} \dots n_{-\alpha_{\ell}, \ell} \right) \right], \quad (388)$$

ahol $\alpha_i = \pm 1$ és $n_+ = 1 \pm n$, $n_- = n$ jelölést használtuk. Ez az alak még mindig több tagot tartalmaz, mint a klasszikus Boltzmann egyenlet, mert a részecske keltés és eltüntetés folyamatai is benne vannak.

6.8 Új szabadsági fokok

Előfordulhat, hogy a Lagrange-függvény alakját annyira megváltoztathatjuk, hogy más terek is megjelenhetnek benne. Ha tudjuk valahonnan, hogy az eredeti csupasz $\mathcal{L}(A_i, G_u, \Lambda)$ Lagrange-függvény által leírt fizika ugyanaz, mint egy másik $\mathcal{L}'(a_i, g_v, \Lambda')$ csupasz Lagrange-függvény által leírt fizika, amely azonban más tereket, más típusú csatolásokat és más levágást tartalmaz, akkor a \mathcal{L}' paramétereit meghatározhatom annyi fizikai mennyiségből, amennyi a paraméterek száma. Ezen mennyiségeket pedig \mathcal{L} eredeti Lagrange-függvényből számolhatjuk ki. Ezt az eljárást hívjuk *matching*-nek, mivel a két Lagrange-függvény által leírt fizikát illesztjük össze.

Ennek legegyszerűbb esete, mikor $T = 0$ -n a levágás értékét csökkentem le. Ebben az esetben a terek számát csökkentem, hiszen a Λ' levágással rendelkező elméletben azok a módusok, amelyek impulzusa $\Lambda > |k| > \Lambda'$, hiányoznak. Ha azonban a levágás nagyon nagy, akkor mégis képesek leszünk leírni ugyanazt a fizikát.

Nézzük ezt az esetet a Φ^4 elméletben. Az új elmélet terei Λ' alatt a régiével azonosak, normálás erejéig $\Phi \rightarrow \zeta \Phi$. Az azonos fizika feltétele, hogy az új elméletben (a fenti normálás erejéig) ugyanazok legyenek a korrelációs függvények. Ez most azt jelenti, hogy

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda, m^2; \Lambda) = \zeta^n(\Lambda') G^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda', m'^2; \Lambda'). \quad (389)$$

Ez formálisan ugyanolyan egyenlet, mint a (311) egyenletek, amelyeket a skálaváltásnál alkalmaztunk. Mint ott, most is lederiválhatunk Λ' szerint, amivel a következő egyenletet kapjuk ($\Lambda' \rightarrow \Lambda$ átnevezéssel):

$$\left(n \frac{d \ln \zeta}{d \ln \Lambda} + \frac{d \lambda}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{d m^2}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial m^2} + \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \right) G^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda, m^2; \Lambda) = 0. \quad (390)$$

Három egyenletet ezek közül felhasználhatunk a $\zeta(\Lambda)$, $\lambda(\Lambda)$ és $m^2(\lambda)$ összefüggések meghatározására. Azonban a munkát megtakaríthatjuk, ha észrevesszük, hogy megfelelő (pl. MS) sémát használva a csupasz mennyiségek a renormált csatolásokkal úgy fejezhető ki, hogy

$$g_b(\Lambda) = g_{ren}(\mu) + \delta g \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} \right). \quad (391)$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{d g_b}{d \ln \Lambda} = \frac{d \delta g}{d \ln \Lambda} = \frac{d \delta g}{d \ln \Lambda / \mu} = - \frac{d \delta g}{d \ln \mu} = \frac{d g}{d \ln \mu}. \quad (392)$$

Ez vezető rendben azt jelenti Φ^4 elméletben, hogy

$$\frac{d \lambda_b}{d \ln \Lambda} = \frac{3 \lambda_b^2}{16 \pi^2} \Rightarrow \lambda_b(\Lambda) = \frac{\lambda_b(\Lambda_0)}{1 - \frac{3 \lambda_b(\Lambda_0)}{16 \pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda_0}}. \quad (393)$$

Ha csökkentem a levágást, akkor a fenti egyenlet szerint gyengébben kölcsönható elmülethez jutok. Ha egy olyan elméletből indulok, amelynek nagyon nagy a levágása ($\Lambda_0 \rightarrow \infty$), és ott megadom a csatolási állandót ($\lambda(\Lambda_0) = \lambda_0$ véges), akkor véges levágások mellett $\lambda(\Lambda) \rightarrow 0$ csatolási állandót kell használnom ugyanahhoz a fizikához. Ez a trivialis az ezen a nyelven.

A szabadsági fokok csökkentése azonban nem adhatja ugyanazt az elméletet. Ha egy olyan szórásról tekintünk, amely eredménye olyan részecske, amely az eredeti elméletben szerepel, a csökkentett levágású

elméletben pedig nem, akkor ezt a szórást \mathcal{L}' nem képes leírni. Így azt várjuk, hogy a \mathcal{L}' elméletben az állapotok nem alkotnak teljes rendszert, az S -mátrix nem lesz unitér.

Hogy ezt lássuk, írjuk fel expliciten az eredeti teret, mint $\Phi(k) = \Theta(k < \Lambda')\phi(k) + \Theta(\Lambda' < k < \Lambda)\chi(k)$. A generátor funkcionál

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]+J\Phi} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\chi e^{iS[\phi+\chi]+J(\phi+\chi)}. \quad (394)$$

Legyen az áram alacsony frekvenciás, azaz $J(k > \Lambda') = 0$. Ekkor $J\chi = 0$, vagyis

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{J\phi} \int \mathcal{D}\chi e^{iS[\phi+\chi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS'[\phi]+J\phi}, \quad (395)$$

azaz

$$e^{iS'[\phi]} = \int \mathcal{D}\chi e^{iS[\phi+\chi]} \Rightarrow S'[\phi] = S[\phi] + \chi\text{-korrekci..} \quad (396)$$

A Φ^4 modellben:

$$\Phi^4 \rightarrow (\phi + \chi)^4 = \phi^4 + 4\phi^3\chi + 6\phi^2\chi^2 + 4\phi\chi^3 + \chi^4. \quad (397)$$

A χ integrálásakor a ϕ csupán a vertex része, de formálisan olyan, mintha ott egy χ vonal indulna, amit amputálunk, és ϕ -vel helyettesítjük azt. Emiatt S' -höz ϕ -ben kvadratikus rendben jövő korrekciói éppen a χ sajátenergiái lesznek (amputált propagátor), azaz

$$S'[\phi] = S[\phi] - \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi_i(-k) \Sigma_{\chi}^{ij}(k) \phi_j(k), \quad i, j = r, a \quad (398)$$

Mivel a χ módusok nagy energiásak, ezért a $\Sigma(k)$ -ban a skála nagy, vagyis a kis impulzusú sorfejtés alkalmazható. Ezért mindig csak a k -ban vezető rendet tartjuk meg.

Az S' hatásnak két furcsasága is van

- Σ_{ra} -nak van imaginárius része, emiatt a hatás nem hermitikus
- kapunk $\phi_a\phi_a$ tagot Σ^{aa} együtthatóval, ami miatt $G^{aa} \neq 0$, ellentétben a mikroszkopikus elméletekre mindig igaz (83) egyenletekkel.

Mindkét pont arra utal, hogy a csökkentett levágással rendelkező elmélet nem mikroszkopikus elmélet.

A fenti problémák kezelésére a következőket lehet csinálni: a Σ^{aa} Fourier-térben teljesen imaginárius, a nulla impulzusú limeszben tehát jelölhetjük

$$i\Sigma^{aa}(k=0) = D. \quad (399)$$

Ekkor a generátor funkcionálban kapott alak

$$e^{iS} \rightarrow e^{-\frac{D}{2}\phi_a^2} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{1}{2D}\xi^2 + i\phi_a\xi}. \quad (400)$$

Ezt úgy értelmezzük, hogy a Σ^{aa} tag helyett $S' - S \rightarrow \xi\phi_a$ tag szerepel, és ξ értékeit Gauss eloszlás szerint, a különböző pontokban egymástól függetlenül választjuk. Vagyis ξ *fehér zaj*, melynek korrelációja $\langle \xi^2 \rangle = D$.

A másik problematikus tagnál szintén az alacsony impulzusú limeszt tartjuk meg. Mivel $\text{Im} \Sigma^{ar}(k_0)$ páratlan, és pozitív frekvenciákra negatív, ezért $\text{Im} \Sigma^{ar}(k_0) = -\gamma k_0 + \dots$. A hatás megfelelő tagja Fourier térben

$$\int 4k\phi_a(-k)(-i\gamma k_0)\phi_r(k) = \int d^4x \phi_a \gamma \partial_t \phi_r. \quad (401)$$

Ez a tag tehát csillapodást ír le, amely az elveszett szabadsági fokokba való szóródásnak felel meg.

Van tehát két tagunk, amely a kiintegrált szabadsági fokokat különböző módon veszi figyelembe. Az egyik a hiányzó állapotokba való szóródás miatti csillapítást adja, a másik a hiányzó szabadsági fokok dinamikáját reprezentálja zaj formájában. Egyensúlyban e kettő hatás relációba hozható, hiszen (232) alapján

$$D = \lim_{k \rightarrow 0} i\Sigma^{aa}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + n(k_0) \right) (-2 \text{Im} \Sigma^{ar}(k)) = 2T\gamma \Rightarrow D = 2T\gamma, \quad (402)$$

ez a *fluktuáció-disszpáció tétel*.